INSTABILITÄT ZIRKULATIONSFREIER ROTATION IN STERNEN

DISSERTATION

zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Georg-August-Universität Göttingen

vorgelegt von

KLAUS FRICKE

aus Leipzig

Göttingen 1967

Fotodruck : ANDREAS FUNKE, Offsetdruck
34 Göttingen . Wendenstraße 5b

INSTABILITÄT ZIRKULATIONSFREIER ROTATION IN STERNEN

DISSERTATION

zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Georg-August-Universität Göttingen

vorgelegt von

KLAUS FRICKE

aus Leipzig

Göttingen 1967

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

D 7

Referent: Professor Dr. Rudolf Kippenhahn
Korreferent: Professor Dr. Hans-Heinrich Voigt
Tag der mündlichen Prüfung: 28. Juli 1967

Inhaltsverzeichnis

I. Einleitung und Zusammenfassung 1

II. Die Gleichungen für nichtstationäre säkulare Störungen 6

III. Die lokale Näherung für das sphärische Cowlingmodell
1. Die lokalen Gleichungen 13
2. Die Stabilitätsbetrachtung 15

IV. Das zylindrische Cowlingmodell
1. Das Eigenwertproblem 21
2. Näherungsbetrachtungen 28

V. Das zylindrische Standardmodell
1. Definitionen und Gleichungen 38
2. Eigenwerte 40
3. Numerische Ergebnisse 43
4. Ergänzungen 48
5. Das allgemeine Standardmodell 50

VI. Das allgemeine Eigenwertproblem für die Kugel
1. Die Störgleichungen 54
2. Kugelfunktionsentwicklungen 56
3. Das Differenzenverfahren 62

Literaturverzeichnis 67

I. Einleitung und Zusammenfassung

Der Rotationszustand in den radiativen Zonen der Sterne ist nicht annähernd bekannt. Die starre Rotation ist vor differentieller Rotation nicht ausgezeichnet, da sich die innere Reibung der Sternmaterie für das Rotationsproblem als bedeutungslos erweist: die in den radiativen Gebieten wirksame molekulare und radiative Viskosität führt bei den Hauptreihensternen zu Diffusionszeiten für den Drehimpuls, die deren Entwicklungszeitskala weit übersteigen. Die Frage nach dem in der Natur verwirklichten Rotationsgesetz ist daher wahrscheinlich eine Frage nach den Anfangsbedingungen bei der Sternentstehung und der gesamten Entwicklung bis zur Hauptreihe. Selbst wenn man sichere Kenntnis der Anfangsbedingungen hätte, wäre dieses Problem mit den heutigen methodischen Mitteln nicht zu bewältigen. Die Theorie der Sternrotation ist daher noch wesentlich die Theorie der möglichen Rotationsgesetze der Sterne und deren Wirkung auf die innere Struktur.

Die Menge der möglichen Rotationsgesetze der Hauptreihensterne ist zunächst nur eingeschränkt durch das Erfordernis dynamischer Stabilität. (Rayleighs Theorem, Chandrasekhar (1961)). Es ist jedoch eine wohlbekannte Tatsache, daß die Rotation im allgemeinen nicht nur das hydrostatische Gleichgewicht, sondern auch das thermische Gleichgewicht modifiziert. Von Zeipels Theorem (von Zeipel (1924)) besagt, daß starre Rotation in einem reibungsfreien Stern mit der Bedingung exakten Strahlungsgleichgewichtes

$$\operatorname{div} \underline{F} = 0 \tag{1.1}$$

wobei $\underline{F}$ den Strahlungsstrom bezeichnet, nicht vereinbar ist. Vogt (1925) und Eddington (1926) zogen daraus als erste die richtige Schlußfolgerung, daß durch die Wirkung des Zentrifugalfeldes auf das "thermische Feld" ein großräumiges Zirkulationssystem in Gang gesetzt wird, das durch seinen konvektiven Energietransport Q_k für die Erfüllung des thermischen Gleichgewichtes in der Form

$$\operatorname{div} \underline{F} = Q_k \tag{1.2}$$

sorgt. Die Notwendigkeit meridionaler Zirkulationen bei nichtstarrer Rotation kann für langsame Rotation in einer Störungstheorie 1. Ordnung nachgewiesen werden (Baker und Kippenhahn (1959)). Die Annahme langsamer Rotation ist für die Sterne der unteren Hauptreihe gerechtfertigt und gilt für die der oberen Hauptreihe mit Ausnahme der Sterne frühen Spektraltyps, die an der Grenze der Rotationsinstabilität rotieren können. Störparameter ist das Verhältnis von Zentrifugalkraft und Schwerkraft am Äquator

$$\chi = \frac{\Omega^2 R^3}{G M} \qquad (1.3)$$

wobei Ω eine charakteristische Winkelgeschwindigkeit, R der Radius, M die Masse des Sterns und G die Gravitationskonstante bedeuten.

Die Geschwindigkeiten der Zirkulationen sind so langsam, daß sie das hydrostatische Gleichgewicht nicht stören. Sweet (1950) fand für starre Rotation der Hülle eines Cowling-Modells für die Laufzeit der Zirkulationen vom Kern zur Oberfläche die Abschätzung

$$\tau_c = 1.6 \cdot 10^8 \, (\bar{M}^2 / \bar{L}\,\bar{R})\, \chi^{-1} \text{ Jahre}, \qquad (1.4)$$

in der L die Leuchtkraft ist und überstrichene Größen in solaren Einheiten einzusetzen sind. Verglichen damit ist die Entwicklungszeitskala auf der Hauptreihe (Schwarzschild (1958))

$$\tau_e = 1.0 \cdot 10^{10} \, (\bar{M} / \bar{L}) \text{ Jahre}. \qquad (1.5)$$

Sie gibt an, wie lange ein Stern braucht, bis er 10 % seines zentralen Wasserstoffs in Helium umgewandelt hat. Aus dem Vergleich von τ_c und τ_e ist ersichtlich, daß für nicht zu kleine χ d.h. vorzugsweise bei Sternen der oberen Hauptreihe, die Zirkulationen merkliche Strecken innerhalb der Entwicklungszeit zurücklegen. Die daraus sich ergebenden ernsten Konsequenzen für

die Theorie der Sternentwicklung wurden bald erkannt, und es sind vor allem diese Konsequenzen, die die Frage nach dem Rotationsgesetz so wichtig machen.

Die Zirkulationen transportieren nicht nur Energie, sondern auch Drehimpuls und verändern damit über die toroidale Komponente der Bewegungsgleichung die ursprüngliche Winkelgeschwindigkeitsverteilung, die sie erzeugte. Die Rotation ist daher als Folge der Wechselwirkung ihres Zentrifugalfeldes mit dem thermischen Felde in einem Stern nicht stationär. Stationäre Rotationsgesetze müssen der Bedingung

$$\underline{V}_m \, \mathrm{grad}\,(\Omega \varpi^2) = 0 \qquad (1.6)$$

genügen, wobei $\underline{V}_m$ der Vektor der meridionalen Geschwindigkeit und ϖ der Abstand von der Drehachse ist. Stationäre Rotationsgesetze ohne meridionale Zirkulationen und Rotationgsgesetze mit stationärer Zirkulation, bei denen der Drehimpuls konstant auf Stromlinien ist. Von der zweiten Gruppe hat man bisher noch keine Lösungen gefunden. Den interessanten Lösungen mit $\underline{V}_m = 0$ sind in der jüngsten Zeit zahlreiche Arbeiten gewidmet worden. Ihre Existenz wurde schon 1942 von Schwarzschild für den Fall des speziellen Standardmodells mit $\varepsilon = \mathrm{const.}$ in einer Störungstheorie 1. Ordnung gezeigt. Diese Rotationsgesetze erfüllen die Bedingungen exakten Strahlungsgleichgewichtes in der ersten Näherung. Es sind die bekannten zirkulationsfreien oder "ausgezeichneten" Rotationsgesetze 1. Ordnung. Für die Cowling-Modelle der Hauptreihensterne wurden sie von Roxburgh (1964) abgeleitet. Roxburgh benutzte seine Rotationsgesetze in mehreren Arbeiten zur Deduktion von Aussagen über den Zustand der Hauptreihensterne (Roxburgh (1964 a,b, 1965, 1966 a,b)). Aus der Tatsache, daß bei den rascher rotierenden Sternen viele Zirkulationsumläufe innerhalb der Entwicklungszeit τ_e stattfinden, schließt Roxburgh auf die Einstellung dieses "ausgezeichneten" Rotationszustandes (Roxburgh (1964)). Nun ist aber kein Mechanismus bekannt, der aus den denkbaren Rotationsgesetzen diejenigen auswählt, die die Bedingung $\mathrm{div}\,\underline{F} = 0$ erfüllen bzw. die

Zirkulationen zu einem Minimum machen. Die Frage der Eindeutigkeit der ausgezeichneten Lösungen für das Cowling-Modell ist ebenfalls nicht geklärt. Baker und Kippenhahn (1959) fanden z.B. im Fall des speziellen Standardmodelles mit ε = const., $\varkappa$ = const. unendlich viele Lösungen. Abgesehen von diesen Schwierigkeiten, die die Anwendbarkeit der ausgezeichneten Rotationsgesetze fragwürdig erscheinen lassen, ist es eine Frage von fundamentaler Bedeutung, ob diese Rotationsgesetze, für die das Rotationsproblem eines Sterns die einfachst mögliche Gestalt annimmt, in einem Stern existieren können. Durch das Vorhandensein der Wechselwirkung zwischen thermischem Feld und Zentrifugalfeld wird nämlich die notwendige Bedingung säkularer Stabilität die Klasse möglicher Rotationsformen weiter einschränken. Darauf hat Kippenhahn (1962) im Zusammenhang mit den ausgezeichneten Rotationsgesetzen zuerst aufmerksam gemacht.

Dieses säkulare Stabilitätsproblem ist bisher nicht behandelt worden und stellt den Gegenstand der vorliegenden Untersuchung dar. Eine Störung des ausgezeichneten Rotationszustandes führt zu langsamen Zirkulationen, deren Corioliskräfte auf die Störung zurückwirken. Die Störung erfolge so langsam, daß sich das System zu jedem Zeitpunkt thermisch adjustieren kann und die Trägheitskräfte vernachlässigbar sind. Es wird in einer linearen Stabilitätstheorie nach der Methode der kleinen Störungen untersucht, ob diese säkularen Störungen abklingen oder anwachsen.

Die exakte Stabilitätsanalyse besteht in der Lösung eines Eigenwertproblems für den ganzen Stern. Die entsprechenden Grundgleichungen werden in Kapitel II aufgestellt. In dieser Allgemeinheit ist das vorliegende Problem jedoch wegen außerordentlicher methodischer Schwierigkeiten für ein realistisches Sternmodell nicht in befriedigender Weise zu behandeln. Es wird daher zunächst auf Allgemeinheit der Methode verzichtet und in Kapitel III ein genäherter Satz von Gleichungen formuliert, der das Stabilitätsverhalten gegen lokale Störungen jeweils an einer bestimmten Stelle der radiativen Zone des Sterns beschreibt. Hierbei werden die Vereinfachungen nach der aus der

Konvektionstheorie bekannten Boussinesq-Approximation wesentlich benutzt. Die Stabilitätsanalyse mit dieser"lokalen Methode" führt auf das Hauptergebnis der vorliegenden Untersuchung: die Instabilität nicht nur der ausgezeichneten, sondern aller stationären Rotationsgesetze in der radiativen Zone eines Sterns.

In den Kapiteln IV und V wird auf die Annahme eines realistischen Sternmodells verzichtet und die Wechselwirkung zwischen Zentrifugalfeld und thermischem Feld bei allgemeinen Störungen in einer zylindrischen Konfiguration studiert. Großräumige Störungen werden in Kapitel IV näherungsweise für das Cowling-Modell, in Kapitel V exakt durch numerische Lösungen des Eigenwertproblems für das Standardmodell behandelt. Es ergeben sich zwei Arten von Instabilität, von denen die eine auch im sphärischen Modell bedeutsam sein dürfte.

Die lokale Näherung liefert gültige Ergebnisse, soweit sie auf Instabilität führt. Sie findet aber in Form der Boussinesq - Approximation auch häufig zum Nachweis von Stabilität eines Systems Verwendung (z.B. Danielson (1962)). Die Berechtigung eines solchen Vorgehens ist bei den meisten Problemen nicht nachprüfbar. Das vorliegende säkulare Stabilitätsproblem des rotierenden, radial von einem Strahlungsstrom durchsetzten Zylinders gestattet direkt den Vergleich von lokalen und großräumigen Störungen bezüglich ihres Stabilitätsverhaltens. Das wird in Kapitel IV durchgeführt und gibt ein Beispiel für ein instabiles System, dessen lokale Störungen näherungsweise Stabilität vortäuschen.

In Kapitel VI werden am sphärischen Standardmodell anhangsweise die charakteristischen Schwierigkeiten für eine Behandlung sphärischer Sternmodelle bei Anwesenheit von meridionalen Zirkulationen anhand analytischer Ansätze und numerischer Lösungsversuche, über die dort berichtet wird, deutlich gemacht.

II. Die Gleichungen für nichtstationäre säkulare Störungen

Struktur und innerer Bewegungszustand eines Sterns werden durch die fundamentalen Erhaltungssätze für jedes Materieelement, sowie durch die Relationen für den Energietransport, in radiativen und konvektiven Gebieten, die Zustandsgleichung und die Poissongleichung für das Gravitationspotential beschrieben.

Das vollständige Gleichungssystem lautet in der radiativen Zone in koordinatenunabhängiger Schreibweise bei Vernachlässigung der Reibungsterme

$$\varrho \frac{d\underline{V}}{d\tau} + \operatorname{grad} P + \varrho \operatorname{grad} \Phi = 0 \quad \text{(Impulserhaltung)} \qquad (2.1a)$$

$$\frac{d\varrho}{d\tau} + \varrho \operatorname{div} \underline{V} = 0 \quad \text{(Massenerhaltung)} \qquad (2.1b)$$

$$\varrho T \frac{dS}{d\tau} = \varrho \varepsilon - \operatorname{div} \underline{F} \quad \text{(Energieerhaltung)} \qquad (2.1c)$$

$$\underline{F} = - K \operatorname{grad} T \quad \text{(Strahlungstransport)} \qquad (2.1d)$$

$$\Delta \Phi = 4\pi G \varrho \quad \text{(Poissongleichung)} \qquad (2.1e)$$

$$P = \frac{1}{\beta} \frac{\mathcal{R}}{\mu} \varrho T \quad \text{(Zustandsgleichung)} \qquad (2.1f)$$

In diesen Gleichungen bedeutet $\frac{d}{d\tau} \equiv \frac{\partial}{\partial \tau} + \underline{V} \operatorname{grad}$ die Lagrangesche Zeitableitung. $\underline{V}$ ist das Geschwindigkeitsfeld, das sich aus Rotation und dem dreidimensionalen inneren Bewegungszustand (V_r , V_ϑ , V_φ) zusammensetzt. P, Φ , T , ϱ , $\underline{F}$ bezeichnen Druck, Gravitationspotential, Temperatur, Dichte und Strahlungsstrom. S ist die Entropie pro Masseneinheit, deren Differential durch

$$dS = C_p \left(\frac{dT}{T} - \nabla_{ad} \frac{dP}{P} \right) \qquad (2.2)$$

gegeben ist. In der Konvektionszone ist S räumlich konstant. Die Gleichungen (2.1c) und (2.1d) sind dann durch die Beziehung

$$\nabla \equiv \frac{d \log T}{d \log P} = \nabla_{ad} \qquad (2.3)$$

zu ersetzen. Strahlungsstrom und Temperaturgradient sind in (2.1d) durch die radiative Leitfähigkeit

$$K = \frac{4ac}{3\varkappa\varrho} T^3 \quad , \qquad (2.4)$$

die den Absorptionskoeffizienten $\varkappa$ enthält, verknüpft (a Stefan-Boltzmann-Konstante, c Lichtgeschwindigkeit). Zu definieren sind weiterhin das Verhältnis von Gasdruck zu Gesamtdruck (= Gasdruck + Strahlungsdruck) in (2.1f)

$$\beta = \frac{\frac{\mathcal{R}}{\mu}\varrho T}{\frac{\mathcal{R}}{\mu}\varrho T + \frac{1}{3} a T^4} \qquad (2.5)$$

($\mathcal{R}$ Gaskonstante, μ mittleres Molekulargewicht), der adiabatische Temperaturgradient in (2.2), (2.3)

$$\nabla_{ad} \equiv \frac{\Gamma - 1}{\Gamma} = \frac{(4-3\beta)(\gamma-1)}{\beta^2 + (\gamma-1)(4-3\beta)^2 + 12(\gamma-1)\beta(1-\beta)} \qquad (2.6)$$

($\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ Verhältnis der spezifischen Wärmen des idealen Gases) und die spezifische Wärme bei konstantem Gesamtdruck in (2.2)

$$C_p = c_v \frac{(\gamma-1)(4-3\beta)\Gamma}{\beta^2(\Gamma-1)} \qquad \text{(Chandrasekhar (1957)).} \qquad (2.7)$$

Die radiative Zone sei chemisch homogen mit dem mittleren Molekulargewicht μ = const.

Für den Opazitätskoeffizienten $\varkappa$ in (2.4) und die nukleare Energieerzeugung ε in (2.1c) werden mittlere Abhängigkeiten von Druck und Temperatur benutzt (Schwarzschild (1947), (1958)):

$$\varkappa = \varkappa_0 \varrho^{e-1} T^{-3-s} \quad , \quad \varepsilon = \varepsilon_0 \varrho T^{\nu} \qquad (2.8\ a,b)$$

mit konstanten Exponenten e, s, ν. Es gilt näherungsweise in (2.8 b) $\nu = 17$ (Proton-Proton-Zyklus) und $\nu = 4.5$ (Kohlenstoff-Stickstoff-Zyklus) für Sterne der oberen bzw. der unteren Hauptreihe ($\bar{M} \gtrless 1.5$) und in (2.8 a) $e = 1.75$, $s = -0.5$ ("Schwarzschilds Gesetz"). Bei den sehr massiven Sternen überwiegt die Absorption durch Elektronenstreuung mit $\varkappa = \varkappa_e = \text{const.}$ ($e = 1$, $s = -3$).

Diese Näherungen sind für die Zwecke der vorliegenden Untersuchung ausreichend.

Die Randbedingungen des Problems werden aus folgenden Forderungen abgeleitet: 1. Im Zentrum wirkt keine Kraft auf die Materie, 2. an der Grenze zwischen radiativer Zone und konvektiver Zone sind Druck-, Temperatur- und Potentialverlauf stetig und glatt, 3. an der Oberfläche verschwinden Druck und Temperatur , und das Gravitationspotential geht stetig und glatt in die Laplacelösung für den materiefreien Außenraum über. Dazu kommen noch die Bedingungen an das Geschwindigkeitsfeld, die sich in der radiativen Zone wegen der Reibungsfreiheit im wesentlichen aus der Forderung der Regularität herleiten. Auf diese Bedingungen wird bei der Behandlung spezieller Modelle eingegangen.

Im nichtrotierenden ungestörten Zustand ist das Geschwindigkeitsfeld $\underline{V} \equiv 0$. Eine Variable Q dieses Zustandes wird mit Q_u bezeichnet. Gleichung (2.1 a) geht in die Bedingung hydrostatischen Gleichgewichtes

$$\operatorname{grad} P_u + \varrho_u \operatorname{grad} \Phi_u = 0 \qquad (2.9)$$

über und (2.1 c) in die Bedingung des Strahlungsgleichgewichts

$$\operatorname{div} \underline{F}_u = \varrho_u \varepsilon_u \qquad (2.10)$$

Die übrigen Gleichungen des Systems gehen in die entsprechenden mit dem Index u über. Mit den obigen Annahmen für $\varkappa$ und ε führen diese Gleichungen auf Cowlingmodelle mit radiativer Hülle für die oberen Hauptreihensterne und mit radiativem Inneren für die unteren Hauptreihensterne (Schwarzschild (1958)),

(Chandrasekhar (1957)). Es werden jetzt die Störgleichungen an die Lösungen 1. Ordnung des Gleichungssystems (2.1) mit stationärer Rotation, die in der Nachbarschaft der statischen Cowlingmodelle existieren, formuliert.

Die Zustandsvariablen werden nach dem Schema

$$Q = Q_u + \chi\, Q_d + O(\chi^2) \qquad (2.11)$$

entwickelt, wobei $\chi = \frac{\Omega_c^2 R_u}{G M}$ und Ω_c eine charakteristische Rotationsgeschwindigkeit, die als die konstante Rotation des konvektiven Gebietes angenommen wird, ist.

In Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ) mit ϑ als Winkelabstand von der Rotationsachse wird ein stationäres Geschwindigkeitsfeld $(V_r, V_\vartheta, \Omega(r,\vartheta)\, r \sin\vartheta)$, das aus der stationären Rotation $\Omega(r,\vartheta)$ und dem thermisch erzeugten meridionalen Zirkulationssystem $\underline{V}_u = (V_r, V_\vartheta, 0)$ 1. Ordnung besteht, betrachtet. Die Zirkulationsgeschwindigkeiten werden ebenfalls nach (2.11) entwickelt. Die stationären Störgrößen seien mit Q_{d0} bezeichnet. Der Index d wird der Einfachheit halber im folgenden weggelassen. Die Erhaltungssätze lauten dann in linearisierter Form:

$$-\varrho_u \Omega^2 \chi^{-1} r \sin^2\vartheta + \varrho_u \frac{\partial \Phi_0}{\partial r} + \varrho_0 \frac{d\Phi_u}{dr} + \frac{\partial P_0}{\partial r} = 0 \qquad (2.12\,a)$$

$$-\varrho_u \Omega^2 \chi^{-1} r^2 \sin\vartheta\cos\vartheta + \varrho_u \frac{\partial \Phi_0}{\partial \vartheta} + \frac{\partial P_0}{\partial \vartheta} = 0 \qquad (2.12\,b)$$

$$V_{r0}\left(\frac{2}{r} + \frac{1}{\Omega}\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right) + V_{\vartheta 0}\,\frac{1}{r}\left(2\,\mathrm{ctg}\,\vartheta + \frac{1}{\Omega}\frac{\partial \Omega}{\partial \vartheta}\right) = 0 \qquad (2.12\,c)$$

$$\mathrm{div}\,\varrho_u \underline{V}_0 = 0 \qquad (2.12\,d)$$

$$\varrho_u V_{r0} C_p \left(\frac{dT_u}{dr} - \nabla_{ad}\frac{T_u}{P_u}\frac{dP_u}{dr}\right) + \mathrm{div}\,\underline{F}_0 - (\varepsilon\varrho)_0 = 0 \qquad (2.12\,e)$$

wobei sich $\underline{F}_0$, Φ_0 und ϱ_0 aus folgenden Gleichungen bestimmen:

$$\underline{F}_0 = -K_u\,\mathrm{grad}\,T_0 - K_0\,\mathrm{grad}\,T_u \qquad (2.12\,f)$$

mit $$\frac{K_0}{K_u} = -\frac{(\varrho\varkappa)_0}{\varrho_u \varkappa_u} + 3\,\frac{T_0}{T_u} \qquad (2.12\,g)$$

$$\Delta \Phi_0 = 4\pi G \varrho_0 \qquad (2.12\,h)$$

$$\frac{\varrho_0}{\varrho_u} = \frac{1}{\beta}\left(\frac{P_0}{P_u} - (4-3\beta)\,\frac{T_0}{T_u}\right) \qquad (2.12\,i)$$

Für verschwindende meridionale Zirkulationen ist dieses Gleichungssystem von Schwarzschild (1942, 1947) und Roxburgh (1964) für verschiedene Sternmodelle dazu verwendet worden, die ausgezeichneten Rotationsgesetze als Lösung des dazugehörigen inhomogenen Randwertproblems zu berechnen. Stationäre Lösungen mit $\underline{v}_m \neq 0$ wurden bisher nicht angegeben. Dieser Frage soll hier nicht nachgegangen werden, sondern sogleich die Grundgleichungen des allgemeinen Stabilitätsproblems für stationäre Zustände formuliert werden. Es wird eine allgemeine dreidimensionale Störung des nichtrotierenden Modells in der Nachbarschaft einer stationären Lösung betrachtet. Sie wird nach dem Schema

$$Q_d = Q_{d0} + Q_{d1} \qquad (2.13)$$

zerlegt. Diese Zerlegung gilt auch für die meridionalen Geschwindigkeiten. Das gestörte Rotationsgesetz schreibe man in der Form

$$\Omega = \Omega_0\,(1 + W) \qquad (2.14)$$

wobei Ω_0 das stationäre Rotationsgesetz bedeutet und W die relative Störung. Für die Störung des Zentrifugalfeldes folgt

$$\Omega^2 r \sin\vartheta = \Omega_0^2 r \sin\vartheta + 2\,\Omega_0^2 r \sin\vartheta\, W + O(W^2) \qquad (2.15)$$

Die Gleichungen für die Störungen Q_{d1} an den stationären Zustand werden an einer Stelle (r, ϑ) der meridionalen Ebene in einem mit der lokalen Winkelgeschwindigkeit Ω_0 rotierenden

System (Chandrasekhar (1961)) aufgeschrieben und die hydrostatische Näherung entsprechend dem säkularen Charakter der Störungen gemacht. Wenn wieder der Index d weggelassen wird und für die Geschwindigkeiten im rotierenden System die alten Bezeichnungen beibehalten werden, sowie für Ω_0 einfach Ω gesetzt wird, lauten die Erhaltungssätze bis auf Glieder $O(\chi^2)$ $O(W^2)$, $O(W\chi)$:

$$-2\varrho_u \Omega^2 \chi^{-1} W r \sin^2\vartheta + \varrho_u \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} + \varrho_1 \frac{d\Phi_u}{dr} + \frac{\partial P_1}{\partial r} = 0 \qquad (2.16\ a)$$

$$-2\varrho_u \Omega^2 \chi^{-1} W r \sin\vartheta\cos\vartheta + \varrho_u \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi_1}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r}\frac{\partial P_1}{\partial \vartheta} = 0 \qquad (2.16\ b)$$

$$\chi^{-1}\frac{\partial W}{\partial \tau} + V_{r1}\left(\frac{2}{r} + \frac{1}{\Omega}\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right) + V_{\vartheta 1}\left(\frac{2\,\mathrm{ctg}\,\vartheta}{r} + \frac{1}{\Omega}\frac{1}{r}\frac{\partial \Omega}{\partial \vartheta}\right) \qquad (2.16\ c)$$
$$+ \frac{1}{\Omega r^2 \sin^2\vartheta}\left(\frac{1}{\varrho_u}\frac{\partial P_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi}\right) = 0$$

$$\frac{\partial \varrho_1}{\partial \tau} + \mathrm{div}\,\varrho_u \underline{V}_1 = 0 \qquad (2.16\ d)$$

$$C_p \varrho_u \left(\frac{\partial T_1}{\partial \tau} - \nabla_{ad}\frac{T_u}{P_u}\frac{\partial P_1}{\partial \tau}\right) + C_p \varrho_u V_{r1}\left(\frac{dT_u}{dr} - \nabla_{ad}\frac{T_u}{P_u}\frac{dP_u}{dr}\right)$$
$$+ \mathrm{div}\,\underline{F}_1 - (\varepsilon\varrho)_1 = 0\ , \qquad (2.16\ e)$$

wobei $\underline{V}_1 = (V_{r1}, V_{\vartheta 1}, V_{\varphi 1})$ mit $V_{\varphi 1} = \Omega r \sin\vartheta \chi^{-1} W$ ist. Im konvektiven Kern gilt anstelle von (2.16 e) mit (2.3)

$$d\left(\frac{T_1}{T_u}\right) = \nabla_{ad}\, d\left(\frac{P_1}{P_u}\right) \qquad (2.16\ f)$$

Bei Definition der Geschwindigkeiten relativ zum zugrunde gelegten Bezugssystem gelten diese Gleichungen lokal für beliebige dreidimensionale Störungen und differentielle Rotationsgesetze und global für konstante Rotation im rotierenden System. Sie gelten global für beliebige axialsymmetrische Störungen und differentielle Rotationsgesetze im Inertialsystem. Die Störgrößen

$$\underline{F}_1\ ,\ \Phi_1\ ,\ \varrho_1$$

genügen denselben Gleichungen wie die entsprechenden stationären

Störungen. Die vollständige Formulierung des Stabilitätsproblems bedarf noch der Ergänzung der Gleichungen (2.16) durch die homogenen Randbedingungen, die durch Linearisierung aus den anfangs erwähnten allgemeinen Randbedingungen hervorgehen. Mit der Zeitabhängigkeit $\exp(\sigma\tau)$ ergibt sich ein Eigenwertproblem für den Stabilitätskoeffizienten σ. Die Vorzeichen der Realteile der Eigenwerte σ entscheiden dann über das Stabilitätsverhalten des Systems gegen kleine Störungen.

Im nächsten Kapitel wird das Gleichungssystem (2.16) zunächst für lokale Störungen unabhängig von den Randbedingungen in der Boussinesq-Approximation behandelt.

III. Die lokale Näherung für das sphärische Cowlingmodell

1. Die lokalen Gleichungen

In der radiativen Zone wird das Differentialgleichungssystem (2.16) an jedem Punkt (r,ϑ) der meridionalen Ebene durch ein Näherungssystem mit konstanten Koeffizienten ersetzt, welches das Stabilitätsverhalten gegen lokale Störungen beschreibt. Dazu dient die Boussinesq-Approximation, die von Spiegel und Veronis (1960) für ein kompressibles und thermisch dissipatives Medium formuliert worden ist. Die Dimensionen der Störungen in Richtung des Gradienten der ungestörten Größen (radiale Richtung) an einem vorgegebenen Ort (r,ϑ) der meridionalen Ebene seien klein im Vergleich zu jeder Skalenhöhe der ungestörten Größen an dieser Stelle. Dann ist es konsequent, den Beitrag der Druckstörung in der Dichtestörung und in der Entropiestörung zu vernachlässigen und die Dichtestörung selbst nur im Auftriebsterm, in dem sie mit der Schwerkraft verkoppelt ist, zu berücksichtigen. Für die Dichte gilt dann nach (2.12 i)

$$\varrho_1 = -\frac{(4-3\beta)}{\beta}\,\frac{T_1}{T_0}\,\varrho_0 \quad . \tag{3.1}$$

Ist die Ausdehnung der Störung auch in ϑ - Richtung hinreichend klein, so können sämtliche Koeffizienten des Differentialgleichungssystems (2.16) im Bereich der Störung als konstant angesehen werden. Die Störungen können dann in ebene Wellen

$$Q_1 \sim \exp\left[\sigma\tau + i\,(k_x x + k_y y)\right] \exp(im\varphi) \tag{3.2}$$

in der meridionalen Ebene entwickelt werden, wobei k_x , k_y Wellenzahlen und x , y kartesische Koordinaten mit den Differentialen $dx = dr$, $dy = r\,d\vartheta$ für die Radial- und Tangentialrichtung bedeuten und m (ganzzahlig) der Separationsparameter des Winkels φ ist, von dem die Koeffizienten von (2.16) unabhängig sind. Wählt man k_x, k_y hinreichend groß bzw. die Ausdehnung der Störung $\ell \approx \max\left(k_x^{-1}, k_y^{-1}\right)$ hinreichend

klein, so brauchen in jedem der Differentialoperatoren, die in den einzelnen Gleichungen (2.16) auf die Störvariablen wirken, nur die höchsten Ableitungen beibehalten zu werden, da aufeinanderfolgende Ordnungen von Ableitungen sich größenordnungsmäßig um einen Faktor l/R unterscheiden. Aus (2.12 f) folgt dann z.B.

$$\operatorname{div} \underline{F}_1 = - K_u \Delta T_1 = - \left(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \right) K_u T_1 \quad (3.3),$$

wobei für $\frac{m}{r \sin \vartheta}$ abkürzend k_z geschrieben wurde. Die Variation der Strahlungsleitfähigkeit und damit des Absorptionskoeffizienten fällt dabei mit dem Glied 1. Grades in k_x , k_y weg. Die Poissongleichung lautet

$$- \left(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \right) \Phi_1 = 4 \pi G \varrho_1 \quad (3.4).$$

Sie zeigt, daß für hinreichend große k_x , k_y der Einfluß der Potentialstörung bedeutungslos wird und Φ_1 in allen Gleichungen vernachlässigt werden kann. Die Erhaltungssätze (2.16) ergeben nach Elimination von ϱ_1 mit (3.1) und von $\operatorname{div} \underline{F}_1$ mit (3.3) das System

$$- 2 \varrho_u \Omega^2 r \sin^2 \vartheta \chi^{-1} W + i k_x P_1 - \frac{4 - 3\beta}{\beta} \frac{\varrho_u}{T_u} \frac{d \phi_u}{d r} T_1 = 0 \quad (3.5\,a)$$

$$- 2 \varrho_u \Omega^2 r \sin \vartheta \cos \vartheta \chi^{-1} W + i k_y P_1 = 0 \quad (3.5\,b)$$

$$\sigma \chi^{-1} W + V_{r1} \left(\frac{2}{r} + \frac{1}{\Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right) + V_{\vartheta 1} \left(\frac{2 \operatorname{ctg} \vartheta}{r} + \frac{1}{\Omega} \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial \vartheta} \right) \quad (3.5\,c)$$

$$+ i k_z \frac{1}{\Omega r \sin \vartheta} \frac{1}{\varrho_u} P_1 = 0$$

$$\operatorname{div} \underline{V}_1 = i k_x V_{r1} + i k_y V_{\vartheta 1} + i k_z \Omega r \sin \vartheta \chi^{-1} W = 0 \quad (3.5\,d)$$

$$C_p \varrho_u \sigma T_1 + C_p \varrho_u T_u \frac{d \ln P_u}{d r} (\nabla - \nabla_{ad}) V_{r1} \quad (3.5\,e)$$

$$+ K_u \left(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \right) T_1 = 0$$

Dieses algebraische Gleichungssystem beschreibt an der Stelle (r, ϑ) der meridionalen Ebene bzw. in einem Ring um die Rotationsachse, der im radiativen Gebiet des Sterns verläuft, das Stabilitätsverhalten gegen lokale Störungen. Es besteht aus 5 homogenen Gleichungen für die 5 Störamplituden P_1, T_1, V_{r1}, $V_{\vartheta 1}$, W und definiert ein Eigenwertproblem für den Stabilitätskoeffizienten σ in Abhängigkeit von den Wellenzahlen k_x, k_y, k_z.

2. Die Stabilitätsbetrachtung

Zur Vereinfachung werden dimensionslose Variablen q_u, geeignete Skalenfaktoren und Konstanten eingeführt durch die Beziehungen

$$r = R_u x \quad , \Omega = \Omega_c \omega \quad , \quad k_i \to R_u^{-1} k_i \quad (i = x, y, z) \tag{3.6}$$

$$T_u = \frac{GM}{R_u} \frac{\mu}{\mathcal{R}} t_u \quad , \quad P_u = \frac{GM^2}{4\pi R_u^4} p_u \tag{3.7}$$

$$C = \frac{3 \varkappa_0}{4ac} \frac{L_u R_u^{b-4e} \beta^e}{(4\pi)^{e+1} M^{b+1-le}} \left(\frac{\mathcal{R}}{\mu G} \right)^{b+1-e} , \tag{3.8}$$

$$b = 6 + s + e$$

$$A = \frac{V^*}{R_u} = \frac{L_u R_u}{GM^2} \frac{1}{C} \frac{\mathcal{R}/\mu}{c_p \beta} \quad . \tag{3.9}$$

C ist eine Integrationskonstante des Cowlingmodells, $V^* \chi$ ist die charakteristische Geschwindigkeit der Zirkulationen.

Die Determinante des Gleichungssystems (3.5) führt auf die Dispersionsrelation $\sigma(k_x, k_y, k_z)$:

$$\left(\sigma - \Omega_c \sin\vartheta \frac{\partial \omega}{\partial \vartheta} \frac{k_z}{k_y}\right) \frac{4-3\beta}{\beta^2} \frac{(\nabla - \nabla_{ad})}{4\omega^2 x^2 \sin^2\vartheta} \left(\frac{d \log p_u}{d \log x}\right)^2 t_u \left(1 - \frac{k_x}{k_y} \operatorname{ctg}\vartheta\right)^{-1}$$

$$\left[1 + \frac{x}{2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{k_x}{k_y} \left(\operatorname{ctg}\vartheta + \frac{1}{2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial \vartheta}\right)\right]^{-1} = \tag{3.10}$$

$$= \sigma \chi + A \chi \left(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2\right) \frac{t_u^{b+1}}{p_u^{e+1}} \quad .$$

(3.10) gibt den Stabilitätskoeffizienten σ für jede (zulässige) Wahl von k_x, k_y, k_z an einem beliebigen Ort (x,ϑ) der radiativen Zone an. Bei der Diskussion von (3.10) kann man sich auf den ϑ - Bereich $0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$ beschränken. Störungen mit $Re\,\sigma > 0$ sind instabil, mit $Re\,\sigma < 0$ stabil. Da die Wellenzahlen reell sind, ist nach (3.10) auch σ stets reell. Das ist eine unmittelbare Folge der Vernachlässigung der niedrigen Ableitungen in den Differentialoperatoren, die für lokale Störungen gilt. Der sonst auftretende kleine Imaginärteil bewirkt bei $Re\,\sigma < 0$ abklingende Schwingungen und bei $Re\,\sigma > 0$ anwachsende Schwingungen.

Mit (3.10) wird der folgende Satz bewiesen: Alle stationären Rotationsgesetze 1. Ordnung mit oder ohne stationäres Zirkulationssystem sind säkular instabil.

Zum Beweis wird der Hilfssatz benötigt: Alle zylindersymmetrischen Rotationsgesetze $\Omega = \Omega(\varpi)$, d.h. alle Rotationsgesetze mit konservativem Zentrifugalfeld sind instationär. Für $\Omega(\varpi) = \Omega = \text{const.}$ ist diese Aussage eine Folge des von Zeipelschen Theorems und der Gleichung (1.6). In der erweiterten Form ist sie von Roxburgh (1966) mit dem von Zeipelschen Formalismus bewiesen worden.
Aus der Gültigkeit des Hilfssatzes folgt, daß die Funktionaldeterminante der Funktionen $\omega(r,\vartheta)$ und $\varpi(r,\vartheta) = r\sin\vartheta$ in einem beliebigen Punkt der radiativen Zone für stationäre Rotationsgesetze i.a. einen von 0 verschiedenen Wert hat, d.h.

$$D \equiv \frac{x}{2}\,\frac{1}{\omega}\,\frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{\omega}\,\frac{\partial \omega}{\partial \vartheta}\,tg\,\vartheta \neq 0 \qquad (3.11)$$

ist. Weitere Definitionen sind:

$$E = \left(1 + \frac{1}{2}\,\frac{1}{\omega}\,\frac{\partial \omega}{\partial \vartheta}\,tg\,\vartheta\right) \qquad (3.12)$$

$$\zeta = \left(1 - \frac{k_x}{k_y}\,ctg\,\vartheta\right) \qquad (3.13)$$

$$B = \frac{4-3\beta}{\beta^2}\,\frac{(\nabla - \nabla_{ad})}{4\omega^2 x^2 \sin^2\vartheta}\left(\frac{d\log p_u}{d\log x}\right)^2 t_u \qquad (3.14)$$

Wegen $D - D_{ad}$ in der radiativen Zone gilt $\mathcal{B} < 0$. In (3.10) wird mit (3.11 - 3.13) der Ausdruck

$$\left[1 + \frac{x}{2}\frac{1}{\omega}\frac{\partial\omega}{\partial x} - \frac{k_x}{k_y}\left(ctg\,\vartheta + \frac{1}{2}\frac{1}{\omega}\frac{\partial\omega}{\partial\vartheta}\right)\right] = D + \zeta E \qquad (3.15)\ ;$$

für axialsymmetrische Störungen ($k_z = 0$) nimmt die Instabilitätsbedingung $\sigma > 0$ mit (3.10 - 3.15) die Gestalt

$$\mathcal{B}\,\zeta^{-1}\,(D + \zeta E)^{-1} - \chi > 0 \qquad (3.16)$$

an. Die Größen $\mathcal{B}$, D , E haben in (3.16) am Punkt (x,ϑ) feste, durch den thermischen Zustand und das Rotationsgesetz bestimmte Werte. Es ist zu untersuchen, ob ζ - Werte existieren, die der Bedingung (3.16) genügen. Mit diesen ergeben sich dann aus (3.13) die instabilen Wellenzahlen (k_x, k_y) als diejenigen, für welche

$$\frac{k_x}{k_y} = (1 - \zeta)\,tg\,\vartheta \qquad (3.17)$$

ist. Wegen $\mathcal{B} < 0$ und $\chi > 0$ ist für die Gültigkeit von (3.16) notwendig, daß

$$\zeta\,(D + \zeta E) < 0 \qquad (3.18)$$

ist. Damit folgt als notwendige und hinreichende Bedingung

$$0 < -\zeta\,(D + \zeta E) < |\mathcal{B}|\,\chi^{-1} \quad . \qquad (3.19)$$

Nach dem Hilfssatz gilt für stationäre Rotationsgesetze an einem beliebigen Punkt (x , ϑ) der radiativen Zone im allgemeinen $D \neq 0$. Es sei $D < 0$. Dann existiert ein $\zeta_1(x,\vartheta) > 0$, so daß für alle $0 < \zeta < \zeta_1$ die erste Ungleichung in (3.19) erfüllt ist und ein $\zeta_2(x,\vartheta;\chi) > 0$, so daß für alle $0 < \zeta < \zeta_2$ die zweite Ungleichung (3.19) erfüllt ist. (3.19) ist dann erfüllt für alle

$$0 < \zeta < \zeta_0 = \min(\zeta_1, \zeta_2) \quad , \quad (D < 0) \qquad (3.20\ a)$$

Ist $D>0$, so sind ζ , ζ_1 , ζ_2 negativ zu wählen, und man bekommt Instabilität für alle

$$0 < |\zeta| < \zeta_0 = \min(|\zeta_1|, |\zeta_2|), \quad (D > 0) \qquad (3.20\ b)$$

Damit ist der oben formulierte Satz bewiesen. An allen Stellen (x , ϑ) der radiativen Zone an denen für ein stationäres Rotationsgesetz ω $D \neq 0$ ist, existieren instabile Anregungen, und zwar nach (3.13) unendlich viele. (3.10) zeigt, daß sich zu jeder instabilen axialsymmetrischen Störung durch entsprechende Wahl von k_x/k_y noch beliebig viele instabile nichtaxiale Anregungen finden lassen.

Im Spezialfall der Roxburghschen Rotationsgesetze (Roxburgh (1964 a,b)) gilt $\omega = \omega(x)$ und $\frac{\partial \omega}{\partial x} < 0$. Damit wird

$$D = \frac{x}{2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial x} < 0 \quad \text{und} \quad E = 1 \qquad . \qquad (3.21)$$

Nach (3.20 a) gilt $\zeta_1 > 0$, $\zeta_2 > 0$. Für hinreichend langsame Rotation ($\chi \to 0$) gilt im Inneren der radiativen Zone mit Ausnahme des Achsenbereiches $\zeta_2(\chi) > \zeta_1$, so daß sich die Instabilitätsbedingung (3.19) mit (3.13) und (3.21) auf

$$0 < \left(1 - \frac{k_x}{k_y} \operatorname{ctg} \vartheta\right) < \frac{x}{2} \left| \frac{1}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial x} \right| \qquad (3.22)$$

reduziert. (3.22) zeigt, daß in Achsennähe die Störungen mit $k_x \ll k_y$ und in der Nähe des Äquators diejenigen mit $k_x \gg k_y$ instabil sind. Die Rotation in der Äquatorebene ist stabil. Eine Schwingungsmode (k_x, k_y), die an einer Stelle (x , ϑ) instabil ist, ist nicht im ganzen Stern instabil, sondern nur innerhalb eines Winkelbereiches in der meridionalen Ebene, der x - abhängig durch

$$\operatorname{tg} \vartheta_{min} = \frac{k_x}{k_y} \quad , \quad \operatorname{tg} \vartheta_{max} = \operatorname{tg} \vartheta_{min} \left(1 + \frac{x}{2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial x}\right)^{-1} \qquad (3.23)$$

bestimmt ist.

Nichtaxiale Störungen erhöhen im Fall $\omega = \omega(\varkappa)$ nur die Anwachsrate der Störungen, wie (3.10) zeigt.

Allgemein ist die Anwachsrate σ der instabilen Störungen in ($\varkappa$, ϑ) nach (3.10 - 14) größenordnungsmäßig gegeben durch

$$\sigma = \frac{1}{\tau^*} \sim k^2 \chi \, |D| |\zeta| |B|^{-1} \qquad (3.24)$$

mit der Zeitskala der Störung τ^* und $k^2 \equiv k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$. Sie kann wegen des Faktors k^2 prinzipiell beliebig groß werden. Es ist möglich, k^2 so groß anzunehmen, daß die lokale Näherung gilt und das Produkt $k^2|\zeta|$ so anzupassen, daß σ klein genug ist, damit die im Grundgleichungssystem (2.16) eingeführte hydrostatische Näherung gerechtfertigt ist. So sind charakteristische Zeiten τ^* für das Anwachsen der Störungen zu erreichen, die in der Größenordnung und unter der Umlaufszeit eines Zirkulationselementes, die durch $A^{-1}\chi^{-1}$ (vgl.(1.4)) gegeben ist, liegen. Die Einstellung eines stationären Rotationszustandes erscheint damit undenkbar. (3.24) zeigt allgemein noch die folgenden Abhängigkeiten: Wenn die Abweichung von der konstanten Rotation gering ist, ist $|D|$ klein, und die Störung wächst nur langsam an. Starre Rotation ist im Cowlingmodell stabil. Der Faktor χ zeigt die Zunahme der Instabilität mit wachsender Rotationsgeschwindigkeit. Wegen $|B|^{-1} \sim |\nabla - \nabla_{ad}|^{-1}$ wird an der Grenze des konvektiven Gebietes und der radiativen Zone σ sehr groß. Das liegt an der bekannten Singularität der Zirkulationsgeschwindigkeiten am konvektiven Kern (Sweet(1950)). Die β - Abhängigkeit von A und B zeigt nach (2.7), (3.8), (3.9) und (3.14), daß näherungsweise $\sigma \sim \beta^{3-e} \sim \beta^{5/4}$ ($e = 1.75$ nach Seite 8) gilt und damit eine dämpfende Wirkung des Strahlungsdrucks für die instabilen Störungen vorliegt.

Das in diesem Kapitel gewonnene Ergebnis der säkularen Instabilität aller stationären Rotationsgesetze in den radiativen Zonen der Cowlingmodelle hat zur Folge, daß in den radiativen Zonen der Sterne stets meridionale Zirkulationsströme vorhanden sind. Es existieren nicht die einfachen Lösungen der ausgezeichneten Rotationsgesetze, sondern das realistische Rotationsproblem

ist wesentlich durch das Vorhandensein von Zirkulationen charakterisiert und dadurch sehr kompliziert. Es gibt zwei denkbare Möglichkeiten für die langsamen Bewegungen in Sternen: a) die kombinierte Rotations- Zirkulationsbewegung ist periodisch, b) die Bewegungen sind völlig irregulär. Im Fall a) können Lösungen nur auf numerischem Wege gefunden werden. Mit welchen Schwierigkeiten solche Rechnungen verbunden wären, wird z.T. aus Kapitel VI hervorgehen. Im Fall b) ist es möglicherweise vernünftig anzunehmen, daß über sehr lange Zeiträume, welche die Entwicklung auf der Hauptreihe und die Nachhauptreihenentwicklung umfassen, infolge des ständigen Drehimpulstransports durch die Zirkulationen im Zeitmittel die starre Rotation eine brauchbare Näherung für die radiative Zone eines Sterns ist. Das würde erhebliche Konsequenzen für die dynamische Entwicklung eines Sterns haben, die hier nicht erörtert werden sollen.

IV. Das zylindrische Cowling-Modell

Die säkulare Instabilität der stationären Rotationszustände 1. Ordnung wurde im vorigen Kapitel in einer streng lokalen Näherung gezeigt. Die exakte Behandlung der Wechselwirkung zwischen thermischem Feld und dem Zentrifugalfeld ist für die kugelsymmetrische Konfiguration mathematisch sehr kompliziert. Diese Wechselwirkung soll daher an einem mathematisch einfacheren Modell untersucht werden. Dazu eignet sich der im ausgezeichneten Rotationsgesetz rotierende Zylinder. Das zugehörige Eigenwertproblem ist in der Koordinate z parallel zur Rotationsachse separierbar und daher eindimensional zu formulieren.

Über die Theorie der Rotation hinausgehend interessiert allgemein die Stellung der lokalen Näherung im Rahmen des exakten Problems. Die qualitativen Ergebnisse dieses Kapitels und die zu deren Bestätigung im folgenden Kapitel ausgeführten numerischen Rechnungen für den Zylinder geben ein Beispiel eines physikalischen Systems, dessen großräumige Störungen instabil sind bei scheinbarer Stabilität der in der Boussinesq - Approximation analysierten lokalen Störungen.

1. Das Eigenwertproblem:

Die Gestalt der grundlegenden Erhaltungssätze für die nichtstationären Störungen, die in Kapitel II und III in sphärischen Polarkoordinaten formuliert worden sind, geht in die entsprechende für Zylinderkoordinaten (r, φ, z) über, wenn man in (2.16) folgende Ersetzungen macht:

$$\vartheta \to \frac{\pi}{2} \quad , \; r\,d\vartheta \to dz \quad ; \quad v_\vartheta \to v_z \qquad (4.1)$$

Die Differentialoperatoren sind in Zylinderkoordinaten auszuschreiben.

Die Betrachtung wird auf das ideale Gas ohne Strahlungsdruck ($\beta = 1$) beschränkt. Der Zylinder bestehe aus einem radiativen und einem konvektiven Gebiet. Die Winkelgeschwindigkeitsverteilung im radiativen Gebiet wird mit der konstanten

Winkelgeschwindigkeit des konvektiven Gebietes Ω_c normiert: $\Omega = \Omega_c \omega$. Die radiative Zone liege im nichtrotierenden Modell, das den Radius R_u hat, im Bereich $r_0 \le r \le r_1$ mit $r_0 \ge 0$ für $r_1 = R_u$ oder $r_0 = 0$ für $r_1 < R_u$. Der Entwicklungsparameter in (2.11) für die Störungen bei langsamer Rotation des Zylinders ist

$$\chi = \frac{\Omega_c^2}{2\pi G \bar{\varrho}} = \frac{\Omega_c^2 R_u^2}{2GM} < 1 \qquad (4.2)$$

M ist die Masse pro Längeneinheit in z - Richtung und $\bar{\varrho}$ die mittlere Dichte. L sei die Leuchtkraft pro Längeneinheit. Die im folgenden verwendeten Definitionen von dimensionslosen Variablen und deren Störungen, die durch langsame Rotation hervorgerufen werden, sind:

$$x = \frac{r}{R_u} \;,\; y = \frac{z}{R_u} \;,\; \frac{\Phi}{2GM} = \phi_u + \chi \phi_d \qquad (4.3\,a)$$

$$\frac{\mathcal{R}}{\mu}\frac{1}{2GM} T = t_u + \chi t_d \;,\; \frac{\pi R_u^2}{2GM^2} P_u = p_u + \chi \frac{p_u}{t_u} p_d \qquad (4.3\,b)$$

$$\frac{\pi R_u^2}{M} \varrho = d_u + \chi d_d \;,\; \frac{2\pi r}{L_u} = l_u + \chi \frac{t_u^b}{C p_u^e} l_d \qquad (4.3\,c)$$

(Schwarzschildvariable für den Zylinder),

$$V_r = V^* v_x \;,\; V_z = V^* v_y \;,\; V_\varphi = \Omega r w \qquad (4.4)$$

mit der charakteristischen Geschwindigkeit

$$V^* = \frac{L_u}{C}\frac{R_u}{4GM^2}\frac{\mathcal{R}/\mu}{C_p} \text{ und } \tau^* = \frac{R_u}{V^* \chi} \;, \qquad (4.5)$$

der Zeitskala der Zirkulationen. Parameter des ungestörten Modells sind:

$$C = \frac{3}{8}\frac{\varkappa_0}{ac}\left(2\frac{\mathcal{R}}{\mu}G\right)^{b+1-e}\frac{L_u^{-1} R_u^{-2e}}{M^{2+1-2e}\,\pi^{e+1}} \;,\; \beta = b+s+e \qquad (4.6\,a)$$

$$D = \frac{\varepsilon_0}{L_u}\frac{M^{\nu+2}}{R_u^2}\frac{2}{\pi}\left(2\frac{\mu}{\mathcal{R}}G\right)^{\nu} \qquad (4.6\,b)$$

Es werden die Abkürzungen (Polytropenvariable)

$$V = -\frac{d\log p_u}{d\log x}\,,\quad \frac{1}{n+1} \equiv \nabla = \frac{d\log t_u}{d\log p_u}\,,\quad UV = \frac{2p_u x^2}{t_u^2} \qquad (4.7)$$

verwendet.

Nach Einsetzen der Entwicklungen (4.3) in das allgemeine Gleichungssystem (2.1) erhält man mit $\chi \to 0$ folgende Gleichungen für das nichtrotierende Modell, wenn mit $d_u = p_u / t_u$ die Dichte eliminiert wird:

$$\frac{d\phi_u}{dx} + \frac{t_u}{p_u}\frac{dp_u}{dx} = 0 \qquad (4.8\,a)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dt_u}{dx} &= -\frac{C\,p_u^{\,e}}{x\,t_u^{\,b}}\,l_u \qquad (4.8\,b)\\ \frac{dl_u}{dx} &= D\,x\,p_u^{\,2}\,t_u^{\,\nu-2} \qquad (4.8\,c) \end{aligned}\right\} \quad \text{(radiative Zone)}$$

$$\frac{d^2\phi_u}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{d\phi_u}{dx} = \frac{p_u}{t_u} \qquad (4.8\,d)$$

$$\frac{d\log t_u}{d\log p_u} = \nabla_{ad} \qquad \text{(Konvektionszone)} \qquad (4.8\,e)$$

Falls in der radiativen Zone keine Energieerzeugung stattfindet (wie in der Hülle eines oberen Hauptreihensternes), so ist in den Gleichungen (4.8 b,c) $l_u = 1$ und $D = 0$ zu setzen. Auf die Struktur der konvektiven Zone hat der Strahlungsstrom keinen direkten Einfluß, und die thermischen Gleichungen (4.8 b,c) sind zu ersetzen durch (4.8 e). Die Lösung dieser nichtlinearen Gleichungen mit den Zentrums- und Oberflächenbedingungen, sowie den Stetigkeitsbedingungen an der Grenze der konvektiven Zone ergibt eine Schar von "zylindrischen Cowlingmodellen" mit den Parametern C und D. Diese Lösungen treten in den Störgleichungen als Koeffizienten auf.

Da in diesem Kapitel nur qualitative Betrachtungen über das Stabilitätsverhalten dieser Modelle gegen spezielle Störungen gemacht werden sollen, kann auf die nur numerisch zu gewinnende Lösung dieses Randwert-Problems verzichtet werden.

"Ausgezeichnete" Rotationsgesetze, die definitionsgemäß dem nichtrotierenden Modell stationär ohne meridionale Zirkulationen aufgeprägt werden können, sind für den Zylinder sofort anzugeben. Da die Zentrifugalkraft überall parallel zur Schwerkraft gerichtet ist, sind alle zylindersymmetrischen Rotationsgesetze $\omega(x)$ ausgezeichnete Gesetze. Das hydrostatische Gleichgewicht lautet jetzt

$$\frac{d\phi_0}{dx} + \frac{t_0}{p_0}\frac{dp_0}{dx} - \omega^2 x = 0 \qquad (4.9)$$

Die anderen Gleichungen (4.8) gelten unverändert mit Index $_0$. Die Störungen 1. Ordnung dieser zirkulationsfreien Struktur, Q_{d_1}, die wieder betrachtet wird, werden axialsymmetrisch angenommen. Sie werden in der radiativen Zone durch das nach der oben angegebenen Vorschrift in Zylinderkoordinaten übertragene Gleichungssystem (2.16) beschrieben. Die y - Koordinate und die Zeit werden mit $q_1 = q\, exp(\sigma\tau + ik_y y)$ separiert und $'$ bezeichne die Ableitung nach der Koordinate x. Das Gleichungssystem lautet mit den Definitionen (4.2 - 7) und $\lambda = \tau^* \sigma$ in hydrostatischer Näherung (Indizes der Störgrößen sind weggelassen):

$$x(p' + \phi') + \frac{V}{m+1} p - Vt - 2\omega^2 x^2 w = 0 \qquad (4.10\ a)$$

$$p + \phi = 0 \qquad (4.10\ b)$$

$$\lambda w + \left(\frac{2}{x} + \frac{\omega'}{\omega}\right) v_x = 0 \qquad (4.10\ c)$$

$$v_x\left(1 - V + \frac{V}{m+1}\right) + x\,(v_x' + i k_y v_y) + \lambda\chi(p+t)\frac{x}{t_u} = 0 \qquad (4.10\ d)$$

$$x\ell' + \ell\left(e V - b\frac{V}{m+1}\right) + x^2 k_y t + \lambda\chi\frac{\rho_u^{e+1}}{t_u^{b+1}} x^2 (t - \nabla_{ad} p)$$

$$- v_x \frac{\rho_u^{e+1}}{t_u^{b}} x V (\nabla - \nabla_{ad}) - CD\, \rho_u^{2+e} t_u^{\nu-3-b} x^2 (2p + (\nu-2)t) = 0 \qquad (4.10\ e)$$

$$x t' + \ell - \frac{V}{m+1}(bt - ep) = 0 \qquad (4.10\ f)$$

$$\phi'' + \frac{1}{x}\phi' - k_y^2 \phi = (p-t)\frac{UV}{x^2} \qquad (4.10\ g)$$

Im konvektiven Kern gilt

$$d\left(\frac{t}{t_u}\right) = \nabla_{ad}\, d\left(\frac{p}{t_u}\right) \qquad (4.10\ h),$$

die dort die beiden Gleichungen (4.10 e, f) ersetzt.

Das Gleichungssystem besteht aus 7 homogenen Gleichungen für die Größen ρ, ϕ, t, ℓ, v_x, v_y, W, bzw. aus 6 Gleichungen ohne die Größe ℓ in der konvektiven Zone. Die zugehörigen Randbedingungen sind in Kapitel II (Seite 8) formuliert. Sie sind sämtlich homogen. Das System ist nur für spezielle Eigenwerte λ lösbar; ihr Vorzeichen bestimmt das Stabilitätsverhalten des Systems.

Das Eigenwertproblem für ein Modell mit konvektivem und radiativem Gebiet soll unter speziellen Annahmen angegeben werden. Das konvektive Gebiet behalte seine starre Rotation im gestörten Zustand bei. Da die y - Abhängigkeit separierbar sein soll, muß deshalb für alle $k_y \neq 0$ die Störamplitude der Winkelgeschwindigkeit $W \equiv 0$ sein, andernfalls sind die Stetigkeitsbedingungen für ρ, t, ϕ an der Grenze der Konvektionszone nicht erfüllbar. Mit Gleichung (4.10 c) folgt, daß in der Konvektionszone auch $v_x \equiv 0$ sein muß. Aus (4.10 a) folgt für $W \equiv 0$ mit (4.10 b) der Zusammenhang

$$t - \nabla_{ad} p = 0$$

der für $k_y > 0$ mit (4.10 h) identisch ist. Hiermit und mit (4.10 b) wird t und p aus (4.10 g) eliminiert, und man erhält als einzige Gleichung in der Konvektionszone

$$\frac{1}{x}(x\phi')' + \left(\frac{UV}{x^2}(1-D_{ad}) - k_y^2\right)\phi = 0 \quad . \qquad (4.11)$$

Reduktion des Systems (4.10) für das radiative Gebiet ergibt für t und ϕ das gekoppelte System

$$x\left(\frac{V}{m+1}\right)'(bt+e\phi) + x\left(\frac{V}{m+1}\right)(bt'+e\phi') - x(xt')' - xt'\left(eV - \frac{bV}{m+1}\right) \qquad (4.12\,a)$$

$$+\left(\frac{V}{m+1}\right)\left(eV - \frac{bV}{m+1}\right)(bt+e\phi) + x^2k_y^2t - CD\,p_u^{2+e}t_u^{\nu-3-b}x^2(2p+(\nu-2)t) = 0$$

und

$$\frac{1}{x}(x\phi')' + \left(\frac{UV}{x^2} - k_y^2\right)\phi + \frac{UV}{x^2}t = 0 \quad . \qquad (4.12\,b)$$

Die Randbedingungen für allgemeine Störungen ϕ_d und t_d einer Konfiguration mit konvektivem Kern leiten sich aus den allgemeinen (S. 8) ab: Die Bedingung $\mathrm{grad}\,\bar{\phi} = 0$ im Zentrum ergibt $\phi_d' = 0$ und über das hydrostatische Gleichgewicht und die Zustandgleichung $p_d' = t_d' = 0$ bei $x = 0$. Die Stetigkeit von T , $\bar{\phi}$ und deren Normalableitung am konvektiven Kern fordert Stetigkeit von t_d , ϕ_d und ϕ_d'. t_d' ist im allgemeinen nicht stetig. Denn es ist

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial x}(x_0 + \chi x_{0d}) = \frac{dT_u}{dx}(x_0) + \frac{d^2T_u}{dx^2}(x_0)\chi x_{1d} + \chi\frac{\partial \bar{T}_d}{\partial x}(x_0) + O(\chi^2)$$

wegen der Stetigkeit von $\frac{dT_u}{dx}$ und der Unstetigkeit von $\frac{d^2T_u}{dx^2}$ i.a. stetig bei unstetigem $\frac{\partial \bar{T}_d}{\partial x}$. $\frac{\partial^2\phi_u}{\partial x^2}$ ist dagegen stetig wegen der Stetigkeit der Dichteverteilung und der Poissongleichung. ($\chi x_{0d}(y)$ ist die örtliche Verschiebung der Grenze zwischen konvektivem und radiativem Gebiet).

Aus den Oberflächen bedingungen $T = P = 0$ folgt

$$T(x_1 + \chi x_{1d}) = T_u(x_1) + T_u'(x_1)\chi x_{0d} + \chi\frac{\partial T_d}{\partial x}(x_1) + O(\chi^2)$$

und desgleichen für P . Elimination von χx_{1d} , der Verschiebung der Oberfläche, mit $T_u = P_u = 0$ bei $x_1 = 1$ ergibt eine Randbedingung für die Störungen

$$\frac{T_d}{P_d} = \frac{d\log T_u}{d\log P_u} = \frac{e}{b} \qquad (4.14)$$

oder mit (4.3 b) und (4.10 b)

$$b t_d + e \phi_d = 0 \qquad \text{bei} \quad x = 1 . \qquad (4.15)$$

Dazu kommt bei $x = 1$ die Stetigkeit der Potentialstörung Φ_d und deren Ableitung Φ_d' mit der Lösung der Laplacegleichung

$$\frac{1}{x} (x \phi')' - k_y^2 \phi = 0 \qquad (4.16)$$

für den materiefreien Außenraum $C_1 I_0(k_y x) + C_2 K_0(k_y x)$ (I_0 und K_0 sind die modifizierten Besselfunktionen 0-ter Ordnung). Wegen der Regularität auf der Achse ist $C_1 = 0$ zu wählen, und Elimination von C_2 ergibt die gesuchte Randbedingung

$$\frac{\phi_d'}{\phi_d} = \frac{K_0'(k_y x)}{K_0(k_y x)} = - \frac{K_1(k_y x)}{K_0(k_y x)} \quad \text{bei} \quad x = 1 . \qquad (4.17)$$

Damit sind alle Randbedingungen aufgestellt. Hiermit ist für jedes $k_y > 0$ ein Eigenwertproblem definiert: Im Kern ist die Gleichung 2. Ordnung für ϕ (4.11) mit einer Zentrumsbedingung zu integrieren. Diese Lösung hängt von einer Konstanten C_1 ab. In der Hülle sind 2 Gleichungen 2. Ordnung für ϕ und t (4.12 a,b) mit 2 homogenen Randbedingungen zu integrieren. Diese Lösungen hängen von 2 Konstanten C_2 und C_3 und vom Eigenwertprameter λ ab. Die 3 Übergangsbedingungen am konvektiven Kern ergeben 3 homogene Gleichungen für C_1, C_2, C_3. Deren Lösbarkeitsbedingung stellt eine transzendente Gleichung für die Eigenwerte λ dar. Im allgemeinen existieren für jedes k_y unendlich viele Eigenwerte λ. Ist für ein k_y und ein spezielles Rotationsgesetz auch nur einer dieser λ - Werte positiv, so ist der entsprechende Zustand säkular instabil. Analog kann man das Eigenwertproblem für die Konfiguration mit konvektiver Hülle und radiativem Inneren formulieren. Das soll nicht durchgeführt werden, da im folgenden nur Näherungsbetrachtungen gemacht werden, und die exakte Lösung, für die die Randbedingungen explizit verwendet werden, erst im nächsten Kapitel für ein spezielles Modell gegeben wird.

2. Näherungsbetrachtungen

Es werden jetzt 3 Näherungen für dieses Eigenwertproblem entsprechend der räumlichen Ausdehnung Δx der Störungen in der Richtung, in der die ungestörten Größen variieren, untersucht und miteinander verglichen.

a) Streng lokale Näherung

Die Störung q wird näherungsweise auch in der x - Richtung nach Fourier entwickelt $q \sim exp(i k_x x)$. Es werden die Moden mit sehr kurzen Wellenlängen $(k_x \gg 1)$ betrachtet. Mit (4.10 b, g) ist dann

$$p = -\phi = \frac{(\phi + t)\, UV/x^2}{k_x^2 + k_y^2} \quad , \tag{4.18}$$

woraus für die Größenordnung von ϕ und p folgt: $\phi \sim p \sim t\, k_x^{-2}$ In allen übrigen Gleichungen sind daher ϕ und p zu vernachläassigen. Das gilt insbesondere in der Zustandgleichung und in der Energiegleichung. Das entspricht einer der grundlegenden Annahmen, die bei der Boussinesq-Approximation gemacht werden. Werden darüberhinaus in allen Gleichungen nur die Terme mit den höchsten Potenzen von k_x beibehalten, so liefert die Dichtestörung nur einen Beitrag in Gleichung (4.10 a). Dies ist die 2. fundamentale Annahme der Boussinesq-Approximation. Elimination der thermischen Größen aus den auf diese Weise genäherten Gleichungen ergibt die "kinematischen" Gleichungen

$$v_x \frac{V^2}{2\omega^2} \frac{p_u^{e+1}}{t_u^{b}} \frac{1}{x^3} (D - D_{ad}) = -(k_x^2 + k_y^2) w - \lambda \chi \frac{p_u^{e+1}}{t_u^{b+1}} w \tag{4.19 a}$$

$$\lambda w = \left(\frac{2}{x} + \frac{\omega'}{\omega} \right) v_x \tag{4.19 b}$$

(4.19 a) beschreibt die Wirkung einer Störung des Zentrifugalfeldes auf das thermische Feld, (4.19 b) die Rückwirkung der induzierten meridionalen Geschwindigkeiten auf die Ausgangsstörung über die Corioliskräfte.

An die Form dieser Gleichungen sollen zwei Bemerkungen

angeknüpft werden.

Für kleine χ ist i.a. der Term $\sim \lambda$ in der 1. Gleichung zu vernachlässigen. Elimination von v_x ergibt dann eine Gleichung für die Störamplitude w, die formal durch Separation von Orts- und Zeitkoordinaten im lokalen kartesischen Koordinatensystem x, y durch die Abhängigkeit $\exp[\sigma\tau + i(k_x x + k_y y)]$ aus einer Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = D^* \Delta w \quad \text{mit} \quad D^* = \frac{2\omega^2}{V^2} \frac{t_u^3}{p_u^{e+1}} \frac{\left(\frac{2}{x} + \frac{\omega'}{\omega}\right)}{(D_{ad} - D)} \frac{x^3 V^*}{R_u} \chi \qquad (4.20)$$

als lokale Diffusionskonstante hervorgeht. $D^* > 0$ bedeutet Stabilität (wie im vorliegenden Beispiel), $D^* < 0$ Instabilität. Der Übergang von (4.19) zu (4.20) ist nicht streng gültig, da (4.19) nur für das Teilspektrum $k_x \gg 1$ gilt. Er entspricht einer Extrapolation der Ergebnisse der Boussinesq-Approximation auf das Verhalten allgemeiner Störungen. Dadurch kann Stabilität vorgetäuscht werden, während die Störungen kleiner Wellenzahl zu Instabilität führen können.

Die zweite Bemerkung betrifft die Vernachlässigung des χ - Terms in der Gleichung (4.19 a). Die Struktur der Gleichungen (4.19) mit dem Entwicklungsparameter χ bei der Zeitableitung der Entropie im Energiesatz tritt in der Theorie 1. Ordnung auch bei anderen säkularen Stabilitätsproblemen auf (z.B. bei der Behandlung der Stabilität von "μ - Strömen" (Mestel (1953))). Stabilitätstests, bei denen unter Voraussetzung der Stationarität die Wirkung der Störung auf das System ermittelt und in einem 2. Schritt die Rückwirkung der Störung behandelt wird, vernachlässigen automatisch diesen χ - Term, was mit seiner Kleinheit gerechtfertigt wird (Mestel(1965)). Das ist nicht in jedem Fall richtig. Es gibt in speziellen Systemen spezielle Störungen, bei denen der χ - Term das Stabilitätsverhalten bestimmen kann (s. Kap. V).

Gleichungen (4.19) führen auf die Dispersionsrelation

$$\lambda \left[\frac{V^2 t_u}{2\omega^2}\left(\frac{2}{x} + \frac{\omega'}{\omega}\right)^{-1} \frac{1}{x^2}(D - D_{ad}) - \chi\right] = (k_x^2 + k_y^2) \frac{t_u^{b+1}}{p_u^{e+1}} \qquad (4.21)$$

Sie ist identisch mit derjenigen für die Kugel (3.10) am Äquator und gibt bei axialsymmetrischen Störungen Stabilität für alle dynamisch stabilen Rotationsgesetze. Die Abhängigkeit $\lambda\,(k_y)$ hat danach die in Abbildung 1 a angegebene Gestalt.

b) Erweiterung der streng lokalen Näherung

Für die Störung gelte $\phi \equiv 0$. Von einer solchen Näherung wird in der Theorie der dynamischen Stabilität nichtradialer Schwingungen von Sternen und Polytropen weitgehend Gebrauch gemacht (Ledoux (1965)). Iterative Berücksichtigung der ϕ - Störungen bewies in einigen Fällen die Berechtigung der Methode in diesem speziellen Problem (Cowling (1941)). Die Eigenwerte lassen sich bei $\phi \equiv 0$ durch Integration zwischen den Grenzen der radiativen Zone x_0 und x_1 formal aus der Differentialgleichung angeben. Es ist

$$\lambda = -\frac{Z}{N} \tag{4.22}$$

mit $$Z = \int_{x_0}^{x_1} \rho_u^{-e} t^{2b} x \left\{ |t'|^2 + [\dots]\,|t|^2 \right\} dx - \left[\rho_u^{-e} t_u^{2b} x\, t' \bar{t}\right]_{x_0}^{x_1} \tag{4.23 a}$$

worin

$$[\dots] = k_y^2 + \frac{1}{x}\left(\frac{Vb}{n+1}\right) + \frac{V^2 b^2}{n+1}\,\frac{1}{x^2}\left(\frac{e}{b} - \frac{1}{n+1}\right) - CD\,\rho_u^{2+e}\, t_u^{\nu-3-b}\,(\nu-2)$$

ist, und mit

$$N = \int_{x_0}^{x_1} \rho_u\, t_u^{b-1} x \left[\chi + \frac{(\nabla_{ad}-\nabla)}{4\omega^2}\left(1+\frac{x}{2}\,\frac{\omega'}{\omega}\right)^{-1} \frac{V^2 t_u}{x}\right] |t|^2 dx \tag{4.23 b}$$

Da das Eigenwertproblem nicht selbstadjungiert ist, verbleibt ein Randterm im Ausdruck Z , der im allgemeinen zu komplexen λ führt. Ist der ganze Stern radiativ, so sind $x_0 = 0$ und $x_1 = 1$,und der Randterm verschwindet, so daß die Eigenwerte reell werden. Da $N > 0$ ist, liegt Instabilität für $Z < 0$ vor. Nach (4. 23 a) wächst die destabilisierende Wirkung der Energieerzeugung mit dem Temperaturexponenten ν von ε . Die Wirkung des Absorptionskoeffizienten ist unübersichtlicher:

$[V/(n+1)]'$ ist für Polytropen stets positiv, während

$\frac{e}{b} - \frac{1}{n+1}$ mit den Annahmen über die Absorption (S. 8) stets

negativ ist, da aus (4.8) $\nabla_{ad} \geq \frac{1}{n+1} \geq \frac{e}{b}$ folgt. Durch Abschätzung von $\mathcal{Z}$ mit einer effektiven Polytropen zeigt sich, daß Instabilität durch den "$\varkappa$ - Mechanismus" möglich ist, wenn $|t'|^2/|t|^2$ und k_y^2 klein sind, d.h. für niedrige Eigenfunktionen. Die Vernachlässigung der ϕ - Störung ist dann aber, wie in c) gezeigt wird, keine gute Näherung mehr.

Als Spezialfall eines Modells mit $\phi \equiv 0$ wird das Roche - Modell betrachtet. In der zylindrischen Konfiguration gilt $\phi_u' = \frac{1}{x}$. Mit den ungestörten Gleichungen folgt daraus $x\left(\frac{V}{n+1}\right)' = \left(\frac{e}{b}\right)\frac{1}{t_u^2} > 0$, $\frac{V}{n+1} = \frac{e}{b}\frac{1}{t_u} = -\frac{d\log t_u}{d\log x} > 0$, $\frac{1}{n+1} = \frac{e}{b}$.

Das Modell ist voll radiativ, da $\nabla = \frac{e}{b} < \nabla_{ad}$ ist und die Energieerzeugung auf das Zentrum konzentriert ist. Die Integration in (4.23) ist von $x_0 = 0$ bis $x_1 = 1$ zu erstrecken, so daß

$$\mathcal{Z} = \int_0^1 p_u^{-e} t_u^{2b} x \left\{ |t'|^2 + \frac{1}{x^2}\frac{e^2}{b}\frac{1}{t_u}|t|^2 + k_y^2|t|^2 \right\} dx > 0 \quad (4.24)$$

und damit alle Eigenwerte reell und negativ sind. Das Roche - Modell ist stabil.

Auf Grund der exakten Formel (4.23) für die Eigenwerte der gestörten zylindrischen Konfiguration mit der Nebenbedingung $\phi \equiv 0$ kann die Boussinesq-Approximation in etwas erweiterter Form begründet werden. Es sei das Integrationsintervall $\Delta x = x_1 - x_0 \ll H_q$, wobei $H_q = \left| q_u \frac{dx}{dq_u} \right|$ die Skalenhöhe einer beliebigen der Größen p_u, t_u, sowie des Rotationsgesetzes ω an der Stelle x bezeichne. Die x - Abhängigkeit der Störung sei durch $e^{ik_x x}$ gegeben mit $2\pi/k_x \ll \Delta x$ bei konstanter Amplitude. Die Umformung des Randterms für $\Delta x \ll 1$ ergibt mit den ungestörten Gleichungen

$$-ik_x \left[x p_u^{-e} t_u^{2b} \right]_{x_0}^{x_1} = ik_x \frac{1}{x}\frac{V}{n+1}\left(2b - e(n+1) - \frac{n+1}{V}\right) x p_u^{-e} t_u^{2b} \Delta x,$$

so daß aus (4.23) die folgende Dispersionsrelation für $\lambda(x; k_x, k_y)$ hervorgeht:

$$x\left(\frac{V}{n+1}\right)'b + \frac{\delta V^2}{(n+1)^2}\left(e(n+1)-b\right) + ik_x x \frac{V}{n+1}\left(2b-(n+1)e-\frac{n+1}{V}\right)$$

$$- CD\,\rho_u^{\,2+e} t_u^{\,\nu-3-b} x^2(\nu-2) + x^2(k_x^2+k_y^2) \qquad (4.25)$$

$$= \lambda \frac{\rho_u^{\,e+1}}{t_u^{\,b+1}} x^2 \left\{ \chi + \frac{V^2 t_u}{x} \frac{1}{4\omega^2}\left(1+\frac{x}{2}\frac{\omega'}{\omega}\right)^{-1}(Da\alpha - D) \right\}$$

Für große k_x geht (4.25) in (4.21) über. Der Vergleich mit (4.25) zeigt, daß für kleinere k_x die Dispersionsrelation (4.21) durch Glieder ergänzt wird, die von der Störung der Koeffizienten (Absorptions- und Energieerzeugungsgesetz) und von deren räumlicher Variation über das Intervall Δx herrühren. Der letztere Typ von Zusatzgliedern wird nicht erfaßt, wenn man mit der Entwicklung nach ebenen Wellen in das Ausgangssystem (4.10) geht und anschließend eliminiert, wozu man meistens in der lokalen Näherung gezwungen ist (vgl. die Analyse in Kap. III). Formel (4.25) zeigt, daß auch bei großen k_x ein imaginärer Anteil der Ordnung $O(k_x^{-1})$ beigemischt ist, der allgemein zu Oszillation, bei Instabilität zu overstability Anlaß gibt. Die reellen Terme zeigen wie in (4.22) den destabilisierenden Charakter von ε und $\varkappa$, d.h. sowohl (4.25) als auch (4.23) legen Instabilität bei kleinen k_y nahe, sobald die Störungen in x - Richtung hinreichend ausgedehnt sind. Für die Abhängigkeit von $\lambda(k_y)$ ist demnach der in Abb. 1 b skizzierte Verlauf zu erwarten.

Diese Betrachtung lehrt, daß es heuristisch wertvoll ist, die lokale Näherung auf größere Wellenlängen auszudehnen unter Berücksichtigung der Störungen und der räumlichen Variation der Koeffizienten. Auf diese Weise ist es möglich, Einsicht in das säkulare Stabilitätsverhalten des allgemeinen Problems unter der Nebenbedingung $\phi \equiv 0$ zu gewinnen.

c) Die Homologienäherung

Die Rolle der ϕ - Störung läßt sich in einer Entwicklung der Störungen nach ebenen Wellen nicht übersehen. Die folgende Homologieannahme in der radiativen Zone bietet eine Näherung für großräumige Störungen des Systems. Man setze

$$t/t_u = c_1(k_y) \quad , \quad \phi/\phi_u = c_2(k_y) \qquad (4.26)$$

wobei c_1 und c_2 Konstanten über die ganze radiative Zone sind. Damit erfaßt man nur das Verhalten der Fundamentallösung mit dem niedrigsten Eigenwert des im Abschnitt 1 formulierten Eigenwertproblems für λ. Die Homologienäherung liefert Abschätzungen für die Realteile der Eigenfunktionen und Eigenwerte, die über das Stabilitätsverhalten des Systems gegen großräumige Störungen aussagen.
Aus (4.26) folgt

$$t' = c_1 t_u' \quad , \quad \phi' = c_2 \phi_u'$$

Die Variation der Koeffizienten in den Gleichungen (4.12) wird jetzt wesentlich berücksichtigt. Diese Näherung stellt den anderen Extremfall verglichen mit der lokalen Näherung dar, in der die Variation der Störungen berücksichtigt wird, die Koeffizienten jedoch konstant angenommen werden.

Den Störungen werden durch (4.26) die gleichen Randbedingungen wie den ungestörten Größen aufgezwungen. Die Oberflächenbedingungen sind so für ein vorgegebenes k_y i.a. nicht zu erfüllen. Vom Verhalten der Störungen an der Oberfläche hängt der Eigenwert der Fundamentallösung jedoch nur wenig ab. Das zeigt die Integraldarstellung (4.23) von λ, die einen stark nach der Oberfläche hin abnehmenden Gewichtsfaktor $p_u^{-e} t_u^{2b}$ enthält. Die Koeffizienten der Gleichungen (4.12) werden zur Abschätzung des Eigenwertes durch geeignete Mittelwerte über die radiative Zone ersetzt. Die Krümmungen der Funktionsverläufe von Störgrößen und ungestörten Größen sind in der Homologienäherung gleich. Sie werden bei der Mittelbildung vernachlässigt.

Mit diesen Vereinfachungen ergibt (4.12b)

$$-\frac{\phi}{t} = \frac{P}{t} = \frac{UV/x^2}{\frac{1}{x}\frac{\phi_u'}{\phi_u} + \left(\frac{UV}{x^2} - k_y^2\right)} \equiv \eta(k_y) \qquad (4.27)$$

und (.12 a) mit (4.27) die Dispersionsrelation $\lambda = -\frac{Z}{N}$ mit

$$Z = x\left(\frac{V}{n+1}\right)'(b-e\eta) + \frac{V}{n+1}\left(1 - b\frac{V}{n+1} - e\eta \times \frac{\phi_u'}{\phi_u}\right) + x^2 k_y^2$$
$$- \frac{V^2}{(n+1)^2}(b-(n+1)e)(b+1-e\eta) - CD\, p_u^{2+e} t_u^{V-3-b} x^2 (2\eta + V - 2) \qquad (4.28\,a)$$

$$N = \frac{p_u^{e+1}}{t_u^{b+1}}\left[x^2(1-\nabla_{ad}\eta)\chi + V^2 t_u\left(1-\frac{\eta}{n+1}\right)\frac{(\nabla_{ad}-\nabla)}{4\omega^2\left(1+\frac{x}{2}\frac{\omega'}{\omega}\right)}\right]. \qquad (4.28\,b)$$

Für $\eta = 0$ geht diese Relation in diejenige für das Modell $\phi = 0$ über, die

speziell mit $\frac{e}{b} = \frac{1}{n+1}$ und $D = 0$ die Homologienäherung für das Rochemodell ergibt.

Zur Vereinfachung der Diskussion von (4.28) wird $D = 0$ gesetzt und der Grenzfall sehr langsamer Rotation betrachtet, in dem der Term $\sim \chi$ in N weggelassen wird. Die ungestörten Variablen in (4.28) werden durch eine effektive Polytrope mit Index n ausgedrückt:

$$p_u = p_c u^{n+1}, \quad t_u = t_c u, \quad \phi_u = \phi_c u \tag{4.29}$$

mit $u = u(\xi)$ und $x = t_c p_c^{-1/2} (n+1)^{1/2} \xi$.

Dann ist $\eta(k) = \frac{(n+1) u^{n-1}}{u'/u\xi + (n+1)u^{n-1} - k^2}$ mit $k = k_y \frac{x}{\xi}$ (4.30),

$$\Sigma \xi^{-2} = (b - e\eta) u^{n-1} - \frac{u'}{u} \frac{1}{\xi} - (b+1-e\eta)(b-e(n+1)) \frac{u'^2}{u^2} + k^2 \tag{4.31a}$$

$$N \xi^{-2} = \frac{p_u^{e+1}}{t_u^b} \frac{u'^2}{u^2} (n+1)(n+1-\eta)(D_{ad} - D) \frac{1}{4\omega^2} \left(1 + \frac{\xi}{2} \frac{\omega'}{\omega}\right)^{-1} \tag{4.31b}$$

Nach (4.30) hat einen Pol bei

$$k_c^2 = \frac{u'}{u} \frac{1}{\xi} + (n+1) u^{n-1} \tag{4.32}$$

Für $0 < k < \infty$ durchläuft η alle reellen Werte. Bei

$$k_\infty^2 = \frac{u'}{u} \frac{1}{\xi} + n u^{n-1} \tag{4.33}$$

wird $N = 0$. Dort hat die Dispersionsrelation einen Pol. Dieses Resonanzverhalten ist die Folge der Berücksichtigung der p - Störung in der Dichtestörung (Existenz eines $k_c > 0$) und in der Entropiestörung (Existenz eines $k_\infty > 0$). Für k_∞ bricht die hydrostatische Näherung zusammen. In unmittelbarer Nachbarschaft dieser Wellenzahl befinden sich stabile und instabile Eigenwerte des Systems. Da sich für große k_y aus (4.28) im Einklang mit den früheren Näherungen in den Abschnitten a) und b) Stabilität ergibt, muß in der Nähe von k_∞ ein Marginalpunkt k_0 (Lösung von $\Sigma = 0$) existieren oder der ganze k - Bereich $k < k_\infty$ instabil sein.

Diese Instabilität kann prinzipiell nicht mit einer lokalen Näherung gefunden werden. Es ist nicht geklärt, aber zu vermuten, daß sie auch im nichtseparierbaren Problem der säkularen Stabilität eines sphärischen Modells auftritt.

Der Verlauf der Dispersionsrelation $\lambda(k) = -\frac{\Sigma}{N}$ wird mit der

zylindrischen Polytrope von Index $n = 3$ qualitativ abgeleitet. Die Oberfläche der Polytrope liegt bei $\xi = \xi_0 = 3.574$ (s. Kap. V). Als Mittelwert der Variable u in der radiativen Zone wird $u(\xi = 1.5)$ angenommen. Daraus ergeben sich folgende Vorzeichen von λ für die charakteristischen k - Werte:

Für $k \longrightarrow k_\infty \pm 0$ gilt $Z > 0$ und $N \to \pm 0$, so daß $\lambda \to \pm \infty$ gilt,
bei k_c ist $Z > 0$ und $N < 0$, so daß $\lambda > 0$ ist,
bei $k \longrightarrow 0$ ist $Z > 0$ und $N > 0$, so daß $\lambda > 0$ ist.

Zu beiden Seiten von k_∞ müssen also Marginalwerte existieren. Die sich daraus ergebende Abhängigkeit $\lambda(k_y)$ für die Fundamentallösungen der Gleichungen (4.12), veranschaulicht Abb. 1.c.

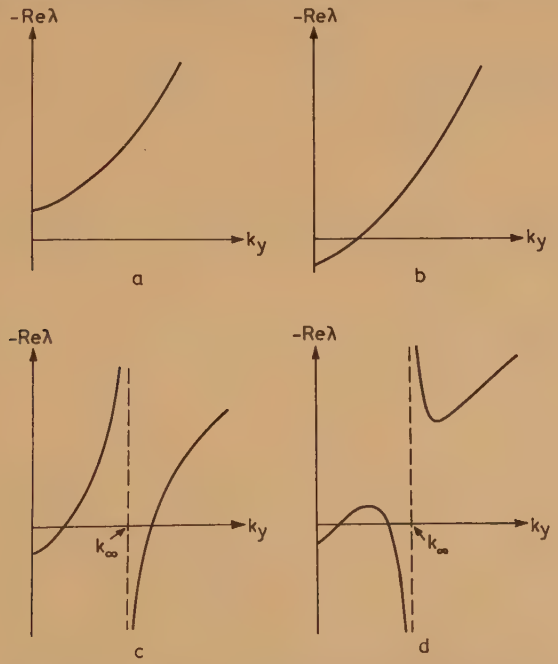

Abb. 1: Qualitative Darstellung der Dispersionsrelation $\lambda(k_y)$ des zylindrischen Cowlingsmodells für langwellige Störungen nach verschiedenen Näherungen im Grenzfall $\chi \to 0$.
a) Boussinesq-Approximation (4.21), b) Näherung $\phi \equiv 0$ (4.23) und erweiterte Boussinesq-Approximation (4.25), c),d) Homologienäherung für $\xi = 1{,}5$ und ein $\xi > 1{,}5$ (4.31). k_∞ ist definiert durch (4.33).

Die Wahl $\xi = 1.5$ ist recht willkürlich. Bei anderen vertretbaren Annahmen über die Mittelwerte der Koeffizienten existiert ebenfalls stets ein $k_\infty > 0$ und damit ein Instabilitätsgebiet in dessen Umgebung. Für $\xi < 1.5$ verschwindet die Instabilität bei kleinem k in Abb. 1 c. Wenn man für die Abschätzung annimmt, tritt eine zweite Nullstelle im Bereich $k < k_\infty$ auf, und $\lambda(k_y)$ zeigt den in Abb. 1 d skizzierten Verlauf.

Interessant ist eine Abschätzung von k_∞ bzw. $k_{y\infty}$. Mit (4.33) und $\xi = 1.5$ folgt $k_\infty^2 = 0.66$. Nach (4.29 - 30) ist damit $k_{y\infty}^2 = \frac{p_c}{t_c^2} \frac{1}{n+1} k_\infty^2 = \frac{p_c}{t_c^2} 0.165$. Die Größenordnung von $\frac{p_c}{t_c^2}$ kann man mit Parameterwerten p_c, t_c eines Kushwaha-Modells für einen Stern der oberen Hauptreihe von $\overline{M} = 5$ (Schwarzschild (1958)) entnehmen. Mit $\frac{p_c}{t_c^2} = 1.2\ 10^2$ ergibt sich $k_{y\infty} = 4.5$ oder für die Wellenlänge der Störung parallel zur Rotationsachse des Zylinders

$$\lambda_z = \frac{2\pi}{k_y} R_u = 1.4\, R_u \qquad (4.31)$$

Es ist also Instabilität der Störungen mit Wellenlängen in der Größenordnung des Radius zu erwarten. p_c/t_c^2 hängt nur geringfügig von der Masse ab. (4.31) schließt zumindest die Bedeutung dieser Instabilität für eine kugelsymmetrische Konfiguration mit Radius R_u nicht aus. Über die Stabilität höherer Eigenlösungen des Systems (4.12) ist mit der Homologienäherung nicht auszusagen.

Die mit der Homologienäherung gefundenen charakteristischen Wellenzahlen k_c und k_∞, sowie die Marginalwerte sind als Eigenwerte exakt zu definieren. Die Gleichungen (4.12) sind von der Struktur

$$L_1[t] + k_y^2 t + L_2[\phi] = \lambda (r_1 t + r_2 \phi) \qquad (4.32\ a)$$

$$H[\phi] + k_y^2 \phi = h t \qquad (4.32\ b)$$

mit entsprechenden linearen Differentialoperatoren L_1, L_2, H und Funktionen r_1, r_2, h von x. Die Marginalwerte k_0 mit $\lambda = 0$ sind Eigenwerte des Problems 4. Ordnung, das durch die Festsetzung $\lambda = 0$ aus (4.32) mit den Randbedingungen an t und ϕ entsteht. Die k_∞ mit $\lambda^{-1} = 0$ sind Eigenwerte von

$$H[\phi] + k_y^2 \phi = 0 \qquad (4.33)$$

und die k_c Eigenwerte von

$$H[\phi] + k_y^2 \phi = 0 \qquad (4.34)$$

mit den Randbedingungen an ϕ . Für eine Konfiguration mit konvektivem Kern lauten (4.33) und (4.34) im Grenzfall $\chi \to 0$ mit (4.12)

$$\frac{1}{x}(x\phi')' + \left(\frac{uv}{x^2}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) - k_y^2 \right)\phi = 0 \quad \text{für } k_{y\infty} \qquad (4.35)$$

bzw.

$$\frac{1}{x}(x\phi')' + \left(\frac{uv}{x^2} - k_y^2 \right)\phi = 0 \quad \text{für } k_{yc} \qquad (4.36)$$

in der radiativen Zone. In der konvektiven Zone gilt in beiden Fällen die Gleichung

$$\frac{1}{x}(x\phi')' + \left(\frac{uv}{x^2}(1-\nabla_{ad}) - k_y^2 \right)\phi = 0 \qquad (4.37)$$

Mit den Zentrums-Übergangs- und Oberflächenbedingungen an ϕ sind (4. 35 - 37) Sturm-Liouvillesche Probleme für die $k_{y\infty}$ und k_{yc} . Sie haben wegen des monotonen Verlaufs von $0 < \frac{uv}{x^2} \to 0$ zur Oberfläche je nur einen einzigen reellen Eigenwert $k_{y\infty}$ bzw. k_{yc} . Die Berücksichtigung von $\chi > 0$ ergibt, wie aus (4.12) ersichtlich ist, im vorliegenden Modell keine andere Situation.

Die Betrachtungen dieses Kapitels führten zu dem Hauptergebnis, daß großräumige Störungen im Gravitationspotential zu starken säkularen Instabilitäten führen können, deren Auffindung mit der lokalen Näherung nicht möglich ist.
Zur Bestätigung der qualitativen Ergebnisse dieses Kapitels wird in dem folgenden als einfachstes mögliches Beispiel das zylindrische Standardmodell numerisch behandelt.

V. Das zylindrische Standardmodell

1. Definitionen und Gleichungen

Das Standardmodell ist als Lösung der radiativen Sternaufbaugleichungen (2. 1a-f) unter der Nebenbedingung $\bar{\varepsilon} \cdot \varkappa = \text{const.}$ für die mittlere Energieerzeugung und das Opazitätsgesetz (vgl. Chandrasekhar (1957)) definiert. Für eine zylindrische Konfiguration gilt mit den Bezeichnungen der vorigen Kapitel

$$\bar{\varepsilon}(r) = \frac{\int_0^r \varepsilon \varrho r \, dr}{\int_0^r \varrho r \, dr} \tag{5.1}$$

Die Lösung stellt eine Polytrope vom Index $n = 3$ dar:

$$P_u = K \varrho_u^{4/3} \qquad \text{mit} \qquad K = \left(\frac{3\varkappa}{a\mu^4}\right)^{1/3} \left(\frac{1-\beta}{\beta^4}\right)^{1/3} . \tag{5.2}$$

Es gelten die Relationen $(1-\beta) = \frac{\varkappa \bar{\varepsilon}}{4\pi G c}$ und $\nabla = \frac{1}{4}$ (5.3). Wegen $\frac{1}{4} \leq \nabla_{ad} \leq \frac{2}{5}$ für $0 \leq \beta \leq 1$ ist das Standardmodell vollradiativ. Das ist einer seiner großen mathematischen Vorzüge. Wenn das Potential an der Oberfläche der Polytropen auf Null normiert wird, so lassen sich folgende Skalenfaktoren und dimensionslose Variablen nach dem Schema $Q_u = Q^* q_u$ (5.4) einführen (Index c deutet den Wert auf der Achse an):

$$\Phi_u = \phi_c \phi_u \,, \quad \varrho_u = \varrho_c d_u \,, \quad P_u = p_c p_u = -\frac{1}{4} \varrho_c \phi_c p_u \,, \quad T_u = -\frac{1}{4} \frac{\mu}{\mathcal{R}} \phi_c t_u = t_c t_u \tag{5.5}$$

$$r = r^* x = \sqrt{\frac{-\phi_c}{4\pi G \varrho_c}}\, x \,, \quad F_u = f^* f_u = -\bar{\varepsilon}_c \varrho_c r^* f_u = -\frac{4}{3} \frac{a c t_c^4}{\varkappa_c \varrho_c r^*} f_u$$

Die Lösung des nichtrotierenden ungestörten Problems ist dann gegeben durch $t_u = u \,, \; d_u = u^3 \,, \; p_u = u^4 \,, \; f_u = u' \,,$ (5.6) wobei u die Lösung der Emdengleichung für den Zylinder

$$u'' + \frac{1}{x} u' + u^3 = 0 \tag{5.7}$$

mit der Zentrumsbedingung $u'(0) = 0$ ist. Diese Gleichung wurde zunächst mit einem Adamsverfahren integriert. Die Oberfläche der Polytrope x_1 mit $u(x_1) = 0$ ergibt sich zu $x_1 = 3.574$. Diese Polytrope wurde bereits zur Abschätzung der Koeffizienten des Cowlingmodells im vorigen Kapitel verwendet. R, L und M des Standardmodells sind mit den Parametern $\bar{\varepsilon}(r)$, ϱ_c und ϕ_c gegeben durch

$$R = r^* x_1 \,, \quad M = 2\pi \int_0^R \varrho_u r \, dr = 0.116 \, \varrho_c \pi R^2 \,, \quad L = \bar{\varepsilon}(R) M \tag{5.8}$$

Damit ergibt sich eine Dichtekonzentration des "Standardzylinders" $\varrho_c/\bar{\varrho}$ = 8.62. Die stationären Störungen Q_0 und die nichtstationären Größen Q_1 werden wie in Kapitel II eingeführt und mit den oben angegebenen Skalenfaktoren dimensionslos gemacht. Wie in Kap. IV soll nur die Störung der ausgezeichneten Zustände 1. Ordnung mit verschwindenden meridionalen Zirkulationen betrachtet werden. Diese haben alle zylindersymmetrische Rotationsgesetze $\Omega(r)$. Der Entwicklungsparameter ist

$$\chi = \frac{\Omega_c^2}{2\pi G \varrho_c} \ll \chi_{krit}, \text{ wobei } \chi_{krit} = \frac{\Omega_c^2 R^2}{2GM} = \frac{\Omega_c^2}{2\pi G \bar{\varrho}} = 0.116 \quad (5.9)$$

mit der Rotationsgeschwindigkeit Ω_c auf der Achse. Weitere Definitionen sind

$$V^* = -\frac{f^*}{c_p \varrho_c T_c} > 0 \;,\; \alpha = \frac{r^*}{V^*}\chi^{-1} \;,\; \lambda = \alpha\sigma \;,\; \mu = \alpha\Omega_c \quad (5.10)$$

$$V_{\varphi_1} = r\Omega w \;,\; z = r^* y \;,\; \frac{\partial}{\partial\varphi} \longrightarrow im \;,\; \frac{\partial}{\partial y} \longrightarrow ik$$

Zunächst soll das spezielle Standardmodell mit

$$\bar{\varepsilon} \;,\; \partial\varepsilon = \text{const.} \quad (5.11)$$

betrachtet werden. Mit (5.10) ergibt (2.16) in Zylinderkoordinaten für die 10 Komponenten der Störgrößen des ausgezeichneten Rotationszustandes (ohne Indizes) ein Gleichungssystem von 10 Gleichungen:

$$u^3\phi' + du' - \tfrac{1}{4}p' + \omega^2 x u^3 w = 0 \quad (5.12\,a)$$

$$u^3\phi - \tfrac{1}{4}p = 0 \quad (5.12\,b)$$

$$\lambda w + \left(\frac{2}{x} + \frac{\omega'}{\omega}\right)v_x + \frac{2im\mu}{\omega x^2 u^3}\left(u^3\phi - \tfrac{1}{4}p\right) = 0 \quad (5.12\,c)$$

$$\lambda\chi d + \frac{1}{x}(x u^3 v_x)' + ik u^3 v_y + im\mu\omega w = 0 \quad (5.12\,d)$$

$$\frac{1}{x}(x f_x)' + ik f_y + \frac{im}{x} f_\varphi + d - \lambda\chi\left(u^3 t - \nabla_{ad} p\right) - u^3 u'(1 - 4\nabla_{ad}) v_x = 0 \quad (5.12\,e)$$

$$f_x = -\frac{u'}{u^3} d + 3\frac{u'}{u} t + t' \;,\; f_y = ikt \;,\; f_\varphi = -\frac{im}{x} t \quad (5.12\,f\text{-}h)$$

$$(x\phi')' - \left(k^2 - \frac{m^2}{x^2}\right)\phi + d = 0 \quad (5.12\,i)$$

$$p = (4 - 3\beta) u^3 t + \beta u d \quad (5.12\,j)$$

Diese Gleichungen gelten für beliebige $\omega(x)$ und axialsymmetrische Störungen ($m = 0$) oder für starre Rotation und beliebige $m \geq 0$. Eine neue Variable $\psi = t - \phi$ (5.13) werde eingeführt. Dann lassen sich alle Variablen in (5.12) durch ψ und ϕ ausdrücken, und diese beiden Variablen genügen den Gleichungen

$$(x u^{4/\beta} \psi')' - x u^{4/\beta} \left[\frac{4}{\beta} \left(u^2 + \frac{u'^2}{u^2} \right) + \left(k^2 + \frac{m^2}{x^2} \right) \right] \psi - \lambda x u \chi^{\frac{4}{\beta}+3} (1 - 4 D_{ad}) \phi$$

$$- \lambda x u^{4/\beta} \left[\chi u^3 - (1 - 4 D_{ad}) \frac{4 - 3\beta}{\beta} \frac{1}{x} \frac{1}{\omega^2} \left(\frac{2}{x} + \frac{\omega'}{\omega} \right)^{-1} u' u'^2 \right] \psi = 0 \quad (5.14\ a)$$

$$(x \phi')' + x \left[3u^2 - \left(k^2 + \frac{m^2}{x^2} \right) \right] \phi - \frac{4 - 3\beta}{\beta} x u^2 \psi = 0 \quad (5.14\ b)$$

Dieses Gleichungssystem entspricht (4.12). Die reguläre Lösung der Poissongleichung für den materiefreien Außenraum ist für festes k und m proportional $K_m(kx)$, der modifizierten Besselfunktion m-ter Ordnung (Abramovitz - Stegun (1965)). ϕ genügt daher analog (4.17) den Randbedingungen:

$$\phi' = 0 \quad \text{bei } x = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\phi'}{\phi} = \frac{K_m'(kx_1)}{K_m(kx_1)} \quad \text{bei } x = x_1 \quad (5.15)$$

Wegen (4.14), (5.7), (5.12 b), (5.13) erfüllt ψ die Randbedingungen

$$\psi' = 0 \text{ bei } x = 0 \quad \text{und} \quad \psi = 0 \quad \text{bei } x = x_1 \quad (5.16)$$

Damit ist das Eigenwertproblem definiert, mit dem die Stabilitätsanalyse der ausgezeichneten Rotationsgesetze im zylindrischen Standardmodell zu erfolgen hat.

2. Eigenwerte

Die Störungen seien axialsymmetrisch ($m = 0$). Aus den Eigenlösungen (ψ , ϕ) ist das Geschwindigkeitsfeld (v_x , v_φ, w) durch folgende Beziehungen gegeben:

$$w = \frac{4 - 3\beta}{\beta} \frac{1}{\omega^2} \frac{u'}{u} \frac{1}{x} \psi \quad (5.17\ a)$$

$$v_x = -\lambda \left(\frac{2}{x} + \frac{\omega'}{\omega} \right)^{-1} \frac{1}{\omega^2} \frac{4 - 3\beta}{\beta} \frac{u'}{u} \frac{1}{x} \psi \quad (5.17\ b)$$

$$v_\varphi = -\frac{\lambda \chi}{ik} \left(3\phi - \frac{4 - 3\beta}{\beta} \psi \right) \frac{1}{u} - \frac{1}{ik u^2} \frac{1}{x} (u^2 x v_x)' \quad (5.17\ c)$$

Mit (4.15-16) ist aus (4.17) das Verhalten der Geschwindigkeiten auf der Achse und am Rand abzulesen. Auf der Achse ist $v_x = 0$, v_ψ und W sind regulär. Hingegen führen die sachgemäßen Randbedingungen für ψ wegen $\varrho_u \to 0$ am Rand zu endlichem v_x und daher mit der Kontinuitätsgleichung zu einer Singularität von v_ψ. Es findet dabei jedoch kein Materietransport über den Rand hinaus statt, da $\varrho_u v_x \longrightarrow 0$ geht. Das Integral J über die kinetische Energiedichte der meridionalen Zirkulation

$$J \sim \int_0^{x_1} u^3 \left(v_x^2 + v_\psi^2 \right) x \, dx \qquad (5.18)$$

bleibt endlich, da $u^3 v_\psi^2$ wie $u \longrightarrow 0$ geht. Der Beitrag des Randgebietes, in dem v_ψ sehr groß wird, zum Eigenwert ist verglichen mit dem der Zentralgebiete klein. Das zeigt die Integraldarstellung für die Eigenwerte in Abhängigkeit von den Eigenfunktionen. Durch Integration über (5.14a) nach Multiplikation mit $\overline{\psi}$ von 0 bis x_1 läßt sich λ in der Form $-\lambda = Z/N$ mit

$$Z = \int_0^{x_1} x\, u^{4/\beta} \left[|\psi'|^2 + k^2 |\psi|^2 + \frac{4}{\beta} \left(u^2 + \frac{u'^2}{u^2} \right) |\psi|^2 \right] dx \qquad (5.19\,a)$$

$$N = \int_0^{x_1} x\, u^{4/\beta} \left[\chi u^3 - (1 - 4\nabla_{ad}) \frac{4-3\beta}{\beta} \frac{1}{x} \frac{1}{\omega^2} \left(\frac{2}{x} + \frac{\omega'}{\omega} \right) u^{-1} u'^2 \right] |\psi|^2 dx \qquad (5.19\,b)$$

$$+ (1 - 4\nabla_{ad}) \chi \int_0^{x_1} x\, u^{4/\beta}\, u^3 \frac{\phi}{\psi} |\psi|^2 dx$$

Der Faktor $u^{4/\beta}$ in dem Intgranden von (5.19) rührt von der starken Abnahme der Strahlungsleitfähigkeit $K \sim T^3$ mit dem Radius her und bewirkt, daß zumindest die niedrigen Eigenfunktionen den Eigenwert überwiegend mit ihrem achsennahen Verlauf bestimmen. Das ist charakteristisch für dieses thermische Stabilitätsproblem (vgl. auch (4.23)).

Das Gleichungssystem (5.14) ist vom Typ (4.32) mit $L_2 \equiv 0$ und $r_2 \sim \chi$

$$L_1[\psi] + k^2 \psi = \lambda \left(r_1 \psi + r_2 \phi \right) \qquad (5.20a)$$

$$H[\phi] + k^2 \phi = h \psi \qquad (5.20b)$$

Der Ausdruck (5.19) wird in drei Fällen diskutiert.

a) Die Näherung $\phi \equiv 0$: Für $\phi \equiv 0$ ergibt sich aus (5.19) Stabilität mit reellen Eigenwerten wie in dem entsprechenden Fall beim Cowlingmodell, da $-0.6 \leq (1-4\nu_{ad}) \leq 0$ für $1 \geq \beta \geq 0$ gilt. Dieses Ergebnis ist für die höheren Eigenfunktionen zutreffend, wie die Diskussion in Kap. IV, 2.a,b zeigte.

b) Die "χ - Näherung" : Für $\chi \to 0$ gilt die Näherung $r_2 = 0$, und (5.14a,b) bzw. (5.20 a,b) sind entkoppelt. Das in Kapitel IV definierte k_c ist eindeutig durch die Gleichung

$$\frac{1}{x}(x\phi')' + (3u^2 - k^2)\phi = 0 \qquad (5.21)$$

und die Randbedingungen (4.15) bestimmt. Wenn die Lösungen durch die Festsetzung $\phi(0) = 1$ normiert werden, sind die ϕ - und ψ - Randbedingungen bei k_c nur mit der trivialen Lösung $\psi \equiv 0$ von (5.20a) erfüllbar. Mit $r_2 = 0$ führt $\lambda \to \pm\infty$ in (5.20a) ebenfalls auf $\psi \equiv 0$, d.h. k_∞ ist auch Lösung von (5.21) und fällt daher mit k_c zusammen. Der Eigenwert $\lambda(k_c)$ wird als der Eigenwert λ_c von (5.14a) für $k = k_c$ definiert. Die Eigenfunktion ψ von (5.14a) wechselt bei $k_c = k_\infty$ ihr Vorzeichen. Da für alle k $\lambda < 0$ gilt, ist nach (5.17) für $k > k_c$ die Strömungsrichtung der Zirkulation umgekehrt als für $k < k_c$. Bei Störung mit der Wellenzahl k_c ist das System nur thermisch gestört, und das Geschwindigkeitsfeld wird identisch null.

Im Spezialfall eines Modells mit $L_2 \neq 0$ tritt in der Näherung $r_2 = 0$, die im wesentlichen der Vernachlässigung der lokalen Zeitableitung der Entropie im Energiesatz entspricht, kein Vorzeichenwechsel von λ auf. $\partial/\partial N = -\lambda$ ist für alle k negativ, wie (5.19) zeigt, und damit ist das Modell in der "χ -Näherung" stabil. Dagegen wechselt die Eigenfunktion ψ von (5.14a) bei k_c ihr Vorzeichen. Das bedeutet die Umkehr der Zirkulationsrichtung und der Störung der Winkelgeschwindigkeit, wenn man von langwelligen zu kurzwelligen Störungen übergeht, bei der charakteristischen Wellenlänge $\Lambda_c = \frac{2\pi}{k_c}$.

c) Der allgemeine Fall: Für $\chi \neq 0$ ist k_c durch (5.21) bestimmt. Die zugehörige Lösung sei ϕ_c $(\phi_c(0) = 1)$, $\psi_c \equiv 0$ Damit folgt aus

(5.14 a) $\lambda_c = 0$, d.h. k_c ist im Spezialfall $l_2 = 0$ Marginalwert. k_c ist zugleich der einzige Marginalwert, da $L_1[\psi] + k^2\psi = 0$ keine reellen Eigenwerte hat. (5.19) zeigt, daß instabile Eigenlösungen nur auftreten können für hinreichend großes $\phi/\psi > 0$. Das ist nach (5.14 b) nur für $k < k_c$ möglich k_∞ ist definiert durch

$$\frac{1}{x}(x\phi')' + (3u^2 - k^2)\phi + \frac{r_2}{r_1}\phi\frac{4-3\beta}{\beta}u^2 = 0 \qquad (5.22)$$

mit $$\frac{r_2}{r_1} = \chi(1-4\nabla_{ad})\left[\chi - (1-4\nabla_{ad})\frac{4-3\beta}{\beta}\frac{1}{x}\frac{u'^2}{u\omega^2}\left(\frac{2}{x}+\frac{\omega'}{\omega}\right)^{-1}\right]^{-1}$$

und den Randbedingungen für ϕ . D.h. die Wellenzahlen k_∞, k_c, bei denen $\lambda(k)$ einen Pol bzw. eine Nullstelle hat, sind jetzt getrennt; es gilt $k_\infty = k_c + \Delta k$ mit $\Delta k \sim O(\chi)$ und (5.22) mit (5.21). Die instabilen Eigenwerte liegen im Intervall (k_∞, k_c). Δk wird folgendermaßen abgeschätzt: Wegen (5.22) ist $\phi_\infty = \phi_c + O(\chi)$ Das wird näherungsweise durch ϕ_c ersetzt, (5.22) mit $x\phi_c$ durchmulitpliziert und integriert von $x = o$ bis $x = x_1$. Es folgt unter Benutzung von (5.21)

$$k_\infty^2 - k_c^2 = \frac{4-3\beta}{\beta}\,\frac{\int_0^{x_1} x\frac{r_2}{r_1}u^2\phi_c^2\,dx}{\int_0^{x_1} x\,\phi_c^2\,dx} < 0 \qquad (5.23)$$

(Diese Näherungsformel erhält man auch aus der Anwendung der konsequenten Störungsrechnung 1. Ordnung bezüglich χ auf (5.21) und (5.22)). Zur Auswertung von (5.23) kann die Homologienäherung $\phi_c \sim u$ benutzt werden. Man erhält dann das Instabilitätsintervall in Abhängigkeit von den Parametern χ , β , ω . k_c hängt nach (5.21) von diesen Parametern nicht ab. Δk nimmt nach (5.23) mit der Rotationsgeschwindigkeit $\sim \chi$ zu und mit der Ungleichförmigkeit $\frac{\omega'}{\omega}$ ab bzw. zu je nachdem $\omega' > 0$ oder $\omega' < 0$ ist. Eine Abhängigkeit von β besteht nur bei größeren Rotationsgeschwindigkeiten. Die Stromlinien im Instabilitätsbereich Δk haben dieselbe Richtung wie für $k > k_c$. Wegen des Vorzeichenwechsels von ψ bei k_c ist die Strömungsrichtung nicht allein durch das Vorzeichen des Eigenwertes bestimmt.

3. Numerische Ergebnisse

Eigenwerte und Eigenfunktionen des Systems (5.14) wurden in Ab-

hängigkeit von der Wellenzahl k für das ideale Gas ($\beta = 1$) und konstante Rotation ($\omega = 1$) numerisch berechnet. Dazu wurden das Gleichungssystem (5.14) und die Randbedingungen (5.15-16) in ein Differenzensystem umgewandelt. Das Eigenwertproblem nimmt dann die algebraische Form an

$$A\,\underline{x} = \lambda\, B\,\underline{x} \qquad (5.24)$$

wobei A eine invertierbare und B eine singuläre Matrix ist. $\underline{x} = \{\psi_i, \phi_i\}$ ist der Variablenvektor an den Stützstellen x_i, $i = 1, \ldots, n$ Für die Rechnungen wurde $n = 21$ gewählt. Es wurde das einfache Differenzenverfahren mit zentralen Differenzenquotienten angewendet (vgl. Collatz (1951)). A wurde zunächst numerisch invertiert. Auf das System

$$A^{-1} B\,\underline{x} = \lambda^{-1}\,\underline{x}$$

wurde das Mises'sche Iterationsverfahren angewendet. Für die Berechnung der höheren Eigenwerte und Eigenfunktionen wurde eine Nachiteration nach Wielandt aus Genauigkeitserfordernissen angeschlossen (Zurmühl (1966))[1)]

Die numerischen Rechnungen für $m = 0$ bestätigen allgemein die qualitativen Betrachtungen, die mit der Homologienäherung für die Fundamentalstörung in Kap. IV, 2.c gewonnen wurden.

In Abb. 2 sind die Dispersionsrelationen $\mathrm{Re}\,\lambda(k)$ des tiefsten Eigenwerts für zwei Parameterwerte χ wiedergegeben. Sie zeigen die charakteristische Singularität bei k_∞ mit dem angrenzenden Instabilitätsintervall Δk und das Auftreten eines Marginalpunktes k_c mit $\lambda(k_c) = 0$ Für k_c ergibt sich der numerische Wert $k_c = 1.058$. Die entsprechende kritische Wellenlänge in z -Richtung ist

$$\Lambda_c = \frac{2\pi}{k_c}\, r = \frac{2\pi}{k_c}\,\frac{R_u}{x_1} = 1.66\, R_u$$

Wie beim Cowlingzylinder findet man, daß die kritische Wellenlänge, in deren Nähe instabile Anregungen des Zylinders vom Radius R_u existieren, nicht zu groß ist für die Anregung einer

1) Die Rechnungen, über die in diesem und dem folgenden Kapitel berichtet wird, wurden auf der elektronischen Rechenmaschine IBM 7040 der Aerodynamischen Versuchsanstalt (AVA), Göttingen, durchgeführt.

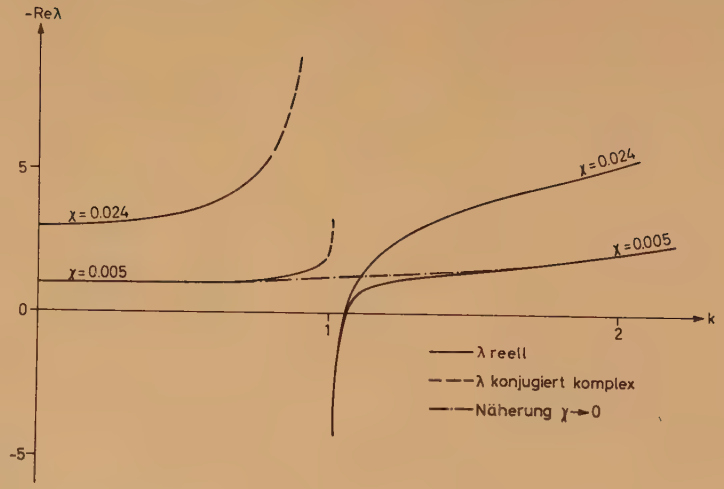

Abb. 2: Berechnete Dispersionsfunktionen $\lambda(k)$ des speziellen zylindrischen Standardmodells für die Fundamentalstörungen mit $\chi = 0.005$ und $\chi = 0.024$ ($\beta = 1, \omega = 1, m = 0$). Die Kurve -.-. zeigt das Versagen der χ - Näherung im Instabilitätsbereich Δk.

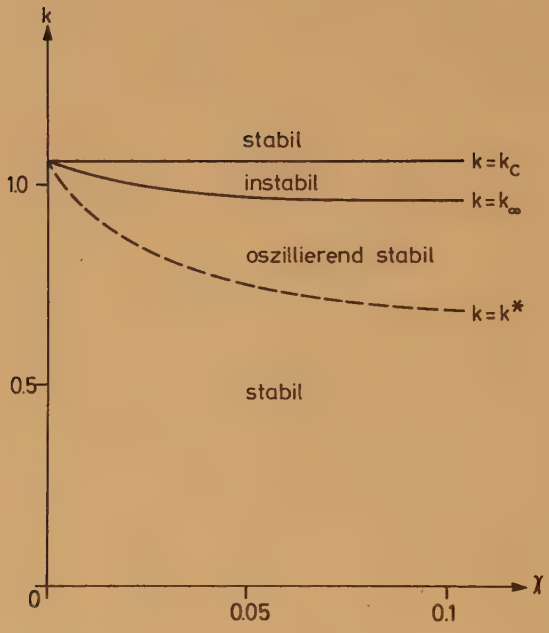

Abb. 3: Gebiete verschiedenen Stabilitätsverhaltens des speziellen Standardmodells in der $k - \chi$ - Ebene für $\beta = 1$, $\omega = 1$, $m = 0$. k_c und k_∞ sind als die reellen Eigenwerte von (5.21) und (5.22) definiert. k_c = const. = 1.058; für $k^* < k < k_\infty$ sind die tiefsten Eigenwerte konjugiert komplex mit negativem Realteil.

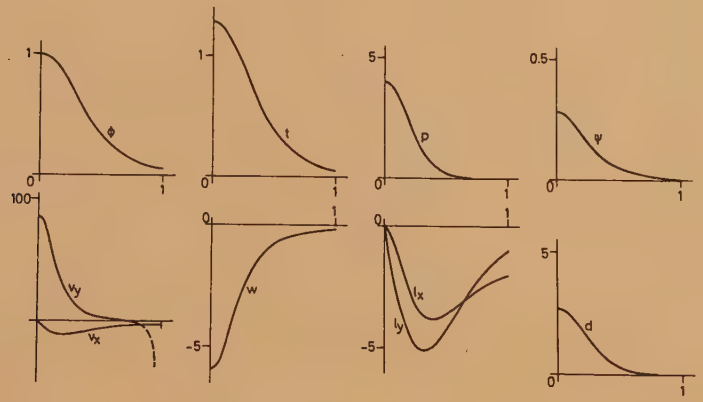

Abb. 4: Die Fundamentallösung von (5.12) für $\chi = 0.024$ ($k = \beta = \omega = 1, m = 0$) im speziellen Standardmodell. Sie ist instabil mit $\lambda = + 9.78$. Abszisse ist der auf den Zylinderradius normierte Achsenabstand $\frac{x}{x_4} = \frac{r}{R_4}$. $l_x = 2\pi \times f_x$, $l_y = 2\pi \times f_y$ sind die Störungen der Leuchtkraft. Das gestrichelte Stück der v_y - Kurve deutet die Singularität von v_y an.

Kugel vom Radius R_u. Die Rechnungen ergeben, daß der tiefste Eigenwert für ein vorgegebenes k i.a. reell ist. In einem kleinen Intervall $k^* < k < k_\infty$ treten konjugiert komplexe Eigenwerte auf. Die zugehörigen Störungen sind gedämpfte Wellen. Für $k > k_c$ wachsen die Eigenwerte rasch an. Eine Instabilität in der Nähe von $k = 0$ ist nicht vorhanden, wie mit der hier zugrunde liegenden Annahme $\varkappa = const$ auch nicht zu erwarten ist (vg. Kap. IV, 2.b).

Abb. 3 zeigt die Gebiete verschiedenen Stabilitätsverhaltens in der $k-\chi$ - Ebene. Das Instabilitätsgebiet wird mit χ beliebig klein. Die "χ - Näherung" versagt in dem instabilen k - Bereich wie auch direkt Abb.2 zeigt, wo für $\chi = 0.005$ die mit der Annahme $r_i = 0$ berechnete Dispersionskurve eingetragen ist. Das ist eine Folge der besonderen Struktur des Gleichungssystems (5.20) im Standardmodell.

In Abb. 4 ist eine instabile Fundamentallösung des Gleichungssystems (5.12) mit den Parametern $m = 0$, $k = 1$, $\beta = 1$, $\omega = 1$ angegeben. Die thermischen Störfunktionen und die Störung des Gravitationspotentials sind im Zentrum maximal und fallen nach außen hin, ohne einen Knoten zu bilden, ab. Ebenso verhält sich die Störung des Rotationsgesetzes w. Das Anwachsen der w - Störung zur Achse ist durch die Drehimpulserhaltung längs der Zirkulationsbahnen bedingt. v_φ hat eine einzige Nullstelle im Intervall $(0, x_1)$. Die Zirkulation führt daher in der Fundamentalstörung einen einfachen Umlauf in der meridionalen Ebene von der Achse zur Oberfläche bzw. umgekehrt aus. In der Nähe der Oberfläche zeigt sich die Singularität von v_φ. Es wurde numerisch nachgewiesen, daß der oberflächennahe Bereich keinen Einfluß auf die Eigenwerte und den Verlauf der Eigenfunktionen hat. Die Störfunktionen im stabilen k - Bereich unterscheiden sich von den in Abb. 4 gezeigten, indem die thermischen Größen im Zentrum nicht sinusoidalen sondern exponentiellen Verlauf zeigen.

4. Ergänzungen

a) Nichtaxialsymmetrische Störungen: k_c ist auch für $m > 0$ einziger Marginalwert, da $L_1[\psi] = 0$ keine reellen Lösungen hat.

k_c bestimmt sich mit (5.14b) aus Gleichung

$$\frac{1}{x}(x\phi')' + \left(3u^2 - k^2 - \frac{m^2}{x^2}\right)\phi = 0 \qquad (5.25)$$

In der Nähe der Achse verhält sich die reguläre Lösung von (5.25) wie

$$J_m(\varkappa x) \sim \left(\frac{\varkappa x}{2}\right)^m \frac{1}{m!} \qquad \text{mit} \quad \varkappa = \sqrt{3\bar{u}^2 - k^2} \qquad (5.26)$$

wobei $\bar{u}$ ein geeigneter Mittelwert von u, $0 < \bar{u} < 1$ ist. (5.25) wird mit $x u^5 \phi$ multipliziert und über das Intervall $(0, x_1)$ integriert:

$$\int_0^{x_1} x u^5 \left(\frac{1}{2}u^2 + 10\frac{u'^2}{u^2} - \frac{m^2}{x^2} - \left(\frac{\phi'}{\phi}\right)^2\right)\phi^2 dx = k_c^2 \int_0^{x_1} x u^5 \phi^2 dx \qquad (5.27)$$

Eine notwendige Bedingung dafür, daß $k_c^2 > 0$ ist und damit eine Marginalwellenzahl $k_c > 0$ existiert, ist, daß der Integrand auf der linken Seite von (5.27) größer als 0 ist. Mit der achsennahen Näherung (5.26) gilt

$$k_c^2 = \left\langle \frac{1}{2}u^2 + 10\frac{u'^2}{u^2} \right\rangle_{x^{2m+1}u^5} \qquad (5.28)$$

Der Mittelwert $\langle\ \rangle$ wird durch den Wert der Klammer am Maximum der mittelnden Funktion $x^{2m+1}u^5$ ausgewertet. Für die niedrigsten m - Werte findet man

m	0	1	2	3
k_c^2	1.37	0.37	-0.9	-3.9

für größere m gilt stets $k_c^2 < 0$, wie das Verhalten der Näherungslösungen $J_m(\varkappa x)$ zeigt (Abramowitz-Stegun (1965)). Damit ergibt sich Instabilität für nichtaxiale Störungen nur im Fall $m = 1$. Für $m = 1$ ist aber, wie (5.26) zeigt, die Zentrumsbedingung $\phi' = 0$ nicht erfüllbar, so daß von den exakten Lösungen nur die axialsymmetrischen Instabilitäten zeigen. Nichtaxiale Störungen werden daher im folgenden nicht weiter betrachtet.

b) Modifizierte innere Randbedingungen: Um den Bedingungen

des Cowling-Modells mit konvektivem Kern näher zu kommen und den Einfluß der inneren Randbedingung auf das Stabilitätsverhalten zu prüfen, wird folgendes modifiziertes Problem betrachtet: Wie in Kapitel IV, 2. wird in einem zentralen Bereich starre Rotation angenommen. Aus Stetigkeitsgründen müssen für jedes $k > 0$ die Störungen der Winkelgeschwindigkeit w und der Größen ψ , v_x , v_y im Zentralbereich identisch verschwinden. Dort lassen sich dann alle Störungen durch ϕ ausdrücken, und ϕ genügt der Gleichung

$$\frac{1}{x}(x\phi')' + (3\omega^2 - k^2)\phi = 0 \quad , \quad 0 \le x \le x_0 \qquad (5.29)$$

mit den Randbedingungen $\phi' = 0$ bei $x = 0$ und ϕ'/ϕ stetig bei $x = x_0$ mit der Außenlösung. Da (5.29) von λ nicht abhängt, wird sie von $x = 0$ bis $x = x_0$ integriert und liefert bei x_0 die innere Randbedingung für die Lösung ϕ des Außengebietes. ψ muß bei x_0 stetig sein mit $\psi \equiv 0$. Daneben wird auch die Randbedingung $\psi'(x_0) = 0$ betrachtet, die endliche Geschwindigkeiten an der Grenze des starr rotierenden Kerns für die meridionalen Zirkulationen zuläßt. Da (5.29) identisch mit (5.21) ist, ändert sich in beiden Fällen am Marginalverhalten nichts gegenüber dem reinen Standardmodell. Für k_c ist $\lambda = 0$ und für $k \le k_c$ existiert ein schmaler Bereich mit positiven Eigenwerten λ . Testrechnungen führten auf betragsmäßig kleinere Eigenwerte als für $x_0 = 0$. Ein mit der Bedingung $\psi' \neq 0$ bei $x = x_0$ konsistentes Innenmodell wird lediglich zu einer Verschiebung von k_c führen, qualitativ jedoch nichts gegenüber der Annahme $\psi = 0$ ändern und zur gleichen Instabilität wie in diesem Fall führen.

5. Das allgemeine Standardmodell

Im speziellen Standardmodell $\bar{\varepsilon}$ = const., $\varkappa$ = const. fällt der Operator $L_2[\phi]$ weg. Dadurch treten die Besonderheiten auf, daß sich in der Näherung $r_2 = 0$ für die Koeffizienten des Systems (5.20)

Stabilität ergibt und k_c Marginalwert wird. Die von der räumlichen Variation des Absorptionskoeffizienten herrührende Instabilität bei kleinen k - Werten, die im Cowlingmodell nach den Homologieüberlegungen auftreten kann, kann an folgendem verallgemeinerten Standardmodell nachgewiesen werden. Es wird eine Relation $\bar{\varepsilon} \cdot \varkappa = const.$ mit

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon_c T^{\nu} , \quad \varkappa = \varkappa_c T^{-\nu} , \quad \beta = 1$$

angenommen. Die Maßeinheit für F wird dementsprechend abgeändert

$$f^* = -\frac{4}{3}\frac{ac}{\varkappa_c \varrho_c}\frac{T_c^{4+\nu}}{r^*} = -r^* \bar{\varepsilon}_c \varrho_c T_c^{\nu}$$

Da nur das grundsätzliche Verhalten der Lösungen vom allgemeinen Typ eines Systems (4.32) interessiert, werden zwei vereinfachende Annahmen gemacht. 1. $\varepsilon = \bar{\varepsilon}$. Das ist in der Nähe der Rotationsachse (das Gebiet, welches den Eigenwert vornehmlich bestimmt) und für kleine ν (die für die Absorptionsformel zutreffen) gerechtfertigt; 2. $\varkappa$ und $\bar{\varepsilon}$ werden nicht gestört. Damit gehen die Gleichungen (5.12 e-g) über in

$$\frac{1}{x}(x f_x)' + ik f_y + u^{\nu} d - \lambda \chi (u^3 - \nabla_{ad} p) - u^3 u' (1 - 4\nabla_{ad}) v_x = 0 \quad (5.30\ a)$$

$$f_x = u^{\nu}\left(-\frac{u'}{u^3} d + 3\frac{u'}{u} t + t'\right) \quad (5.30\ b)$$

$$f_y = ik u^{\nu} t \quad , \quad (5.30\ c)$$

und es ergibt sich anstelle von (5.14 a):

$$u^{\nu}\left\{\psi'' + \left(\nu\frac{u'}{u} + \frac{1}{x} + 4\frac{u'}{u}\right)\psi' + \left(4(\nu-1)\frac{u'^2}{u^2} - 4u^2 - k^2\right)\psi + \nu\frac{u'}{u}\phi'\right\}$$

$$- \lambda\left\{\chi u^3 \psi + \frac{3}{5}\frac{1}{x}\frac{1}{\omega^2}\left(\frac{2}{x} + \frac{\omega'}{\omega}\right)^{-1} u^2 u'^2 \psi - \frac{3}{5}\chi u^3 \phi\right\} = 0 \quad (5.31)$$

mit einem $L_2[\phi] = \nu\frac{u'}{u}\phi'$. Mit den Randbedingungen $\psi(x_0) = 0$, $\psi'(x_0) = 0$ nimmt Z nach (5.19 a) die Form an

$$Z = \int_{x_0}^{x_1} x u^{4+\nu}\left\{k^2|\psi|^2 + |\psi'|^2 + 4\left(u^2 + \frac{u'^2}{u^2}\right)|\psi|^2 - 4\nu\frac{u'^2}{u^2}|\psi|^2 - \nu\frac{u'}{u}\phi'\bar{\psi}\right\} dx$$

während N unverändert bleibt. Der Faktor $x u^{4+\nu}$ unterdrückt wie

Abb. 5: Berechnete Kurve $\lambda(k)$ des allgemeinen Standardmodells nach (5.31) für $\chi = 0.005$, $\beta = \omega = 1$, $m = 0$, $\nu = 2$, $\frac{x_0}{x_1} = 15\%$, $\psi'(x_0) = 0$. Die Kurve zeigt ein Marginalverhalten wie die Skizze d) in Abb. 1. Der punktierte Anstieg des (hier nicht interessierenden) Kurvenstückes für $k > k_c$, der aus den qualitativen Betrachtungen folgt, konnte wegen Konvergenzschwierigkeiten des numerischen Iterationsverfahrens nicht berechnet werden.

in (5.19) und (4.23) den Beitrag der äußeren Regionen zum Eigenwert. Die Darstellung von λ in der Homologienäherung ist

$$-\lambda = \frac{z}{N} = \frac{4u^2 - \frac{1}{x}\frac{u'}{u} - 5\nu\frac{u'^2}{u^2} - \nu\frac{u'^2}{u^2}\eta(k) + k^2}{\chi u^3 + \frac{3}{5}\frac{1}{x}\frac{1}{\omega^2}\left(\frac{1}{x} + \frac{\omega'}{\omega}\right)^{-1}u^2u'^2 - \frac{3}{5}\chi u^3\eta(k)} \qquad (5.32)$$

mit $$\eta(k) = \frac{\phi}{\psi} = u^2\left(\frac{u'}{u}\frac{1}{x} + 3u^2 - k^2\right)^{-1} \qquad (5.33)$$

Sie führt auf die gleichen Typen von Dispersionsfunktionen $\lambda(k)$ in Abhängigkeit vom Mittelwert χ wie in Abb. 1 c,d bereits angegeben. Für k_c geht $\eta(k) \to \infty$, und es ergibt sich Stabilität.

Der Fall $\chi \to 0$, in dem k_c und k_∞ zusammenfallen, wurde numerisch mit den speziellen Parametern $\chi = 0.005$, $\frac{x_0}{x_1} = 15\%$, $\psi'(x_0) = 0$, $\omega' = 1$, $\nu = 2$ untersucht. Die Dispersionsrelation für die Fundamentalstörung ist in Abb. 5 zu sehen. Sie zeigt einen der Skizze d in Abb. 1 ähnlichen Verlauf mit zwei Marginalpunkten für $k < k_c$. Der hier nicht weiter interessierende Anstieg von $-\lambda(k)$ auf der Seite $k > k_c$ konnte aus Konvergenzschwierigkeiten, die dort bei der Berechnung von Eigenwerten und Eigenfunktionen auftraten, numerisch nicht erhalten werden.

Weitere Rechnungen zeigen, daß die Instabilität in der Umgebung von abnehmenden x_0 schwächer wird und für $x_0 = 0$ verschwindet.

Diese numerischen Ergebnisse stehen im Einklang mit denjenigen der Homologienäherung, deren Brauchbarkeit für die Abschätzung des Stabilitätsverhaltens der Fundamentalstörung damit an einem Beispiel gezeigt ist.

VI. Das allgemeine Eigenwertproblem für die Kugel

Die Analyse in Kap. III erbrachte den Nachweis der Instabilität stationärer Rotationszustände für die Kugel in einer lokalen Näherung. In den beiden vorangegangenen Kapiteln wurden die Eigenschaften der niedrigen Lösungen des Eigenwertproblems an einer separierbaren Konfiguration studiert. Die Behandlung des exakten Problems für die Kugel ist aus zwei Gründen wünschenswert. Erstens erfordert die Behandlung des Rotationsproblems nach dem Ergebnis des Kap. III die Berücksichtigung meridionaler Zirkulationen. Es müssen Methoden gefunden werden, das entsprechende partielle Differentialgleichungssystem mit den zugehörigen Randbedingungen zu lösen. Andererseits dürfte es von prinzipiellem Interesse sein festzustellen, ob die in Kap. IV und V gefundenen Eigenschaften des separierbaren Falles, z.B. die destabilisierende Wirkung der Potentialstörung ϕ und die Rolle des " χ -Terms" auch in der astrophysikalisch relevanten sphärischen Konfiguration bedeutsam sind. In diesem Kapitel wird über Versuche berichtet, das spezielle Standardmodell als einfachstes mögliches Modell eines Sterns, das alle Aufbaugleichungen befriedigt, bezüglich der Stabilität seiner ausgezeichneten Rotationsgesetze zu behandeln. Analytisch und numerisch ließen sich nur unvollkommene Antworten auf diese Fragestellung erhalten, da sich charakteristische Schwierigkeiten ergaben, die im folgenden aufgewiesen werden sollen.

1. Die Störgleichungen

Das spezielle Standardmodell ist in (5.1 - 7) für Zylindersymmetrie definiert. $\bar{\varepsilon}$ und $\varkappa$ sind konstant. $\bar{\varepsilon}$ ist jetzt als Mittelwert von ε über Kugeln vom Radius r definiert. Wendet man die gleiche Definition der Einheiten und Konstanten, sowie die Normierung $\bar{\varphi}(R_u) = 0$ an, so gilt für die ungestörten Größen wieder

$$t_u = u, \quad d_u = u^3, \quad p_u = u^4, \quad t_u = u' \qquad (6.1)$$

mit $u = u(x)$, $x = \frac{x_1}{R_u} r$, $x_1 = 6.9011$

u genügt jetzt der Emdengleichung

$$u'' + \frac{2}{x} u' + u^3 = 0 \quad \text{mit} \quad u'(0) = 0 \qquad (6.2)$$

Die Oberfläche liegt bei x_1.

Der Entwicklungskoeffizient für die Störungen ist

$$\chi = \frac{\Omega_c^2}{2\pi G \varrho_c} = \frac{2}{3} \frac{\bar{\varrho}}{\varrho_c} \frac{\Omega_c^2 R_u^3}{GM} \qquad (6.3)$$

Mit der Dichtekonzentration des Standardmodells $\varrho_c/\bar{\varrho} = 54.2$ ergibt sich für konstante Rotation $\Omega = \Omega_c$ ein $\chi_{krit} = 0.012$.

Da $\bar{\varepsilon} = \text{const.}$, existiert eine ganze Schar von ausgezeichneten Rotationsgesetzen 1. Ordnung (Baker und Kippenhahn (1959)), zu denen auch die konstante Rotation gehört (was in 1. Ordnung nicht im Widerspruch zum v. Zeipelschen Theorem steht). Es wird die übliche Störentwicklung angewendet und die Betrachtung auf axialsymmetrische Störungen beschränkt. Die Störungen eines "ausgezeichneten" Zustandes genügen dem allgemeinen Gleichungssystem (2.16). Es lautet in den dimensionslosen Variablen für die Störungen (ohne Indizes) im Standardmodell:

$$u^3 \frac{\partial \phi}{\partial x} + d u' - \frac{1}{4} p' + \omega^2 x u^3 \sin^2\vartheta \, w = 0 \qquad (6.4\,a)$$

$$u^3 \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} - \frac{1}{4} \frac{\partial p}{\partial \vartheta} + \omega^2 x^2 u^3 \sin\vartheta \cos\vartheta \, w = 0 \qquad (6.4\,b)$$

$$\lambda w + \left(\frac{2}{x} + \frac{\omega'}{\omega}\right) v_x + \left(\frac{2 \operatorname{ctg}\vartheta}{x} + \frac{1}{x} \frac{1}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial \vartheta}\right) v_\vartheta = 0 \qquad (.64\,c)$$

$$\lambda \chi x^2 d + \frac{\partial}{\partial x}(x^2 u^3 v_x) + \frac{1}{\sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta}(x \sin\vartheta \, u^2 v_\vartheta) = 0 \qquad (6.4\,d)$$

$$\frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x}(x^2 f_x) + \frac{1}{x} \frac{1}{\sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta}(\sin\vartheta f_\vartheta) + d \qquad (6.4\,e)$$

$$- \lambda \chi (u^3 t - D_{ad} p) - u^3 u' (1 - 4 D_{ad}) v_x = 0$$

$$f_x = \frac{\partial t}{\partial x} + 3 \frac{u'}{u} t - \frac{u'}{u^3} d \qquad (6.4\,f)$$

$$f_\vartheta = \frac{1}{x} \frac{\partial t}{\partial \vartheta} \qquad (6.4\,g)$$

$$\Delta\phi + \alpha = 0 \qquad (6.4\ h)$$

$$p = (4-3\beta)\, u^2 t + \beta u \alpha \qquad (6.4\ i)$$

Das ist das grundlegende homogene Gleichungssystem von 9 Gleichungen für die 9 Variablen $p, t, \phi, \alpha, v_x, v_\vartheta, w, f_x, f_\vartheta$ mit dem Eigenwertparameter λ.

Die folgende Betrachtung wird auf den Spezialfall $\Omega = const.$ als einfachstes stationäres Rotationsgesetz beschränkt.

Die in Kap. III beschriebene konsequente Boussinesq-Approximation, angewendet auf das Gleichungssystem (6.4), ergibt für λ in Abhängigkeit von den Wellenzahlen k_x, k_y und vom Ort in der meridionalen Ebene stets Stabilität, indem die Dispersionsrelation

$$-\lambda = \frac{2\,(k_x^2 + k_y^2)\,(1 - ctg\,\frac{k_x}{k_y})\,\sin^2\vartheta}{(\frac{3}{5}\,u^2 u'^2 + \chi u^3)} \qquad (6.5)$$

lautet. Im folgenden wird das exakte Problem untersucht. Das geschieht zunächst mit einer Näherung für großräumige Störungen bezüglich der Koordinate ϑ.

2. Kugelfunktionsentwicklungen

Im Grenzfall $\chi \to 0$ (sehr langsame Rotation) verschwinden im Energiesatz (6.4 e) und in der Kontinuitätsgleichung (6.4 d) die Terme $\sim \lambda$ (die lokalen Zeitableitungen). Das bedeutet, daß die Wirkung der Zentrifugalstörung auf das thermische Feld und dessen Rückwirkung über die Zirkulationen auf das Störfeld näherungsweise entkoppelt sind, und der Materiestrom näherungsweise quellenfrei ist.

Die Elimination der thermischen Größen und der Potentialstörung aus dem Energiesatz ergibt mit der Drehimpulserhaltung (6.4 c) und der Kontinuitätsgleichung ein System für das Geschwindigkeitsfeld (v_r, v_ϑ, w):

$$\lambda \times w = -2\chi\,(v_x + v_\vartheta \cos\vartheta) \qquad (6.6.a)$$

(Drehimpulserhaltung)

$$-(1-4\,Da\alpha)(4-3\beta)\,u^3 u' \frac{\partial v_x}{\partial \vartheta} =$$

$$\frac{\beta}{2}\Lambda\left\{\frac{\sin^2\vartheta\, x^2}{u^2 u'}\left(\frac{\partial}{\partial x}(u^3 w)\,ctg\,\vartheta - \frac{u^3}{x}\frac{\partial w}{\partial \vartheta}\right)\right\} \qquad (6.6\,b)$$

$$-2\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left\{2w + \sin^2\vartheta\left(x\frac{\partial w}{\partial x} + ctg\,\vartheta\frac{\partial w}{\partial \vartheta}\right)\right\}$$

(Energiesatz)

$$div\,(u^3 \underline{V}) = 0 \quad , \qquad (6.6\,c)$$

wobei $$\Lambda g = \frac{1}{x^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\frac{\partial}{\partial x}g\right) + \frac{1}{x^2}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \vartheta}(\sin\vartheta\, g)\right) \qquad (6.7)$$

ist.

Das System (6.6) ist zu vergleichen mit dem System (4.19). Beide beschreiben die Induktion der Zirkulationen durch das Störfeld w über das thermische Feld, das die Gestalt des Differentialoperators (6.7) bestimmt, und die Rückwirkung der Zirkulationen auf das Störfeld über die Corioliskräfte.(4.19) gilt nur lokal, und es legte sich die Beschreibung der raumzeitlichen Änderung der Störung durch eine Diffusionsgleichung nahe. (6.6) gilt allgemein und zeigt die Kompliziertheit des Ortsoperators, der das gesamte Eigenwertspektrum wiederzugeben vermag.

Die Reduzierbarkeit des Ausgangssystems (6.4) auf das partielle System 4. Ordnung, das nur das Geschwindigkeitsfeld mit der Zentrifugalstörung verknüpft, ist eine mathematische Besonderheit des Standardmodells im Grenzfall $\chi \to 0$. Bei allgemeineren Modellen läßt sich die Potentialstörung nicht eliminieren und das Problem wird durch die Poissongleichung mindestens von 6. Ordnung.

Die Kontinuitätsgleichung wird durch die Einführung einer Stromfunktion ψ mit den Relationen

$$\frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} = u^3 x^2 \sin^2\vartheta\, v_x \quad , \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -u^3 x \sin\vartheta\, v_\vartheta \qquad (6.8)$$

erfüllt. (6.6 a) lautet dann

$$\lambda \sin^2\vartheta\, u^3 x^2 w + \frac{1}{x}\frac{\partial \psi}{\partial \vartheta}\sin\vartheta - \frac{\partial \psi}{\partial x}\cos\vartheta = 0 \qquad (6.9)$$

Um die Gleichungen (6.6) einer analytischen Behandlung zugänglich zu machen, werden w und ψ in Legendre-Reihen entwickelt. Aus der Annahme der Symmetrie der Störung zum Äquator folgt für w:

$$w = \sum_{\ell=0}^{\infty} w_{2\ell} P_{2\ell} \qquad (6.10)$$

und mit (6.9) für ψ:

$$\psi = \sin^2\vartheta \sum_{\ell=1}^{\infty} \psi_{2(\ell+1)} P^{1}_{2(\ell+1)} \sin\vartheta \qquad (6.11),$$

wobei $P_\ell^1 = -\frac{\partial P_\ell}{\partial \vartheta}$ ist.

Da die Störungen w und ψ mit Geometriefaktoren multipliziert in den Gleichungen auftreten, müssen die weiteren Entwicklungen gemacht werden:

$$\begin{aligned}
a &= w\sin^2\vartheta = \Sigma a_\ell P_\ell \quad , \quad a_\ell = \sum_i (P_i \sin^2\vartheta)_\ell\, w_i \\
b &= w\sin\vartheta\cos\vartheta = \Sigma b_\ell P_\ell^1 \quad , \quad b_\ell = \sum_i (P_i \sin\vartheta\cos\vartheta)^1_\ell\, w_i \\
c &= \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta}\sin\vartheta = \Sigma c_\ell P_\ell \quad , \quad c_\ell = \sum_i (P_i \sin^2\vartheta)_\ell\, i(i+1)\,\psi_i \\
d &= \psi\cos\vartheta = \Sigma d_\ell P_\ell \quad , \quad d_\ell = \sum_i (P_i^1 \sin\vartheta\cos\vartheta)_\ell\, \psi_i
\end{aligned} \qquad (6.12\ \text{a-d})$$

worin die Ordnungen ℓ und i gerade sind, $(\quad)_\ell$ bezw. $(\quad)^1_\ell$ die Entwicklungskoeffizienten bezüglich P_ℓ bzw. P_ℓ^1 bedeuten. Für die einzelnen Ordnungen der Gleichungen (6.6) ergibt sich mit (6.8) und (6.9) das System:

$$\lambda u^3 x^2 a_\ell + \frac{1}{x} c_\ell - d_\ell' = 0 \quad , \quad \ell = 0, 2, \ldots \qquad (6.13\ \text{a})$$

$$\begin{aligned}
&-(4-3\beta)(1-4\nabla_{ad})\,\psi_\ell\, \ell(\ell+1)\,\frac{u'}{x^2} = \\
&= -2\Delta_\ell (x^2 b_\ell) + \frac{1}{2}\beta\Delta_\ell \left\{\frac{1}{u^2 u'}\left[(u^3 x^2 b_\ell)' + u^3 x a_\ell\right]\right\} \qquad (6.13\ \text{b}), \\
&+ \frac{2}{x^2}\left[x^2 (x^2 b_\ell)' + x^3 a_\ell\right]' \quad , \quad \ell = 2, 4, \ldots
\end{aligned}$$

wobei $\Delta_\ell q = \frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left(x^2\frac{dq}{dx}\right) - \frac{\ell(\ell+1)}{x^2}q$ ist und von den Beziehungen

$$\ell(\ell+1)\,P_\ell \sin\vartheta + \frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta\,\frac{dP_\ell}{d\vartheta}\right) = 0 \qquad (6.14\text{ a})$$

und

$$\ell(\ell+1)\,P_\ell' + \frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{1}{\sin\vartheta}\left(\sin\vartheta\,P_\ell'\right)\right) = 0 \qquad (6.14\text{ b})$$

Gebrauch gemacht wurde. Eine Trennung der Ordnungen ist nur bezüglich der Größen a, b, c, d, nicht aber für die Variablen ψ und w möglich. Die $a_\ell, b_\ell, \ldots$ in (6.13) sind unendliche Reihen in den Koeffizienten w_i, ψ_i. Es sind daher alle Ordnungen ℓ der Gleichungen (6.13) verkoppelt. Werden die Reihen $a_\ell, b_\ell, \ldots$ nach dem Glied $i = n$ abgebrochen, so ergeben sich aus (6.13 a,b) für $\ell \le 2n$ $n+1$ gewöhnliche Differentialgleichungen 1. Ordnung und n 3. Ordnung für die $2n+1$ Unbekannten $\psi_2, \ldots, \psi_{2n}$; $w_0, \ldots, w_{2n}$. Mit entsprechenden Randbedingungen geben diese $2n+1$ Differentialgleichungen die n - te Näherung an das Eigenwertproblem in Kugelfunktionsentwicklung an. Als "Rest" bleibt der Koeffizient ψ_{2n+2}, der durch (6.13 b) für $\ell = 2n+2$ in Abhängigkeit von den in n-ter Näherung berechneten Variablen gegeben ist. Jeder weitere Näherungsschritt erweitert das System um eine Differentialgleichung 1. Ordnung und eine Differentialgleichung 3. Ordnung. Es ist daher jeweils ein um die Ordnung 4 höheres Problem zu lösen.

Angesichts der methodischen Schwierigkeiten dieses Verfahrens wird die Betrachtung auf die Näherungsgleichungen 1. Ordnung beschränkt. Es wird erwartet, daß eine in ϑ - Richtung großräumige Störung der Winkelgeschwindigkeit

$$w = w_0(x) + w_2(x)\,P_2(\vartheta) \qquad (6.15)$$

eine ebenfalls großräumige Zirkulation induziert, und für ψ wird

$$\psi = \psi_2(x)\,P_2'(\vartheta)\sin\vartheta \qquad (6.16)$$

angesetzt. Dann folgt aus (6.12)

$$a = \frac{2}{3}(1-P_2)\,w_0 + \left(-\frac{2}{15} + \frac{10}{21}P_2 - \frac{12}{35}P_4\right) w_2$$

$$b = \frac{1}{3}P_2'\,w_0 + \left(\frac{1}{21}P_2' + \frac{3}{35}P_4'\right) w_2 \qquad (6.17\ a\text{-}d)$$

$$c = \left(-\frac{2}{15} + \frac{10}{21}P_2 - \frac{12}{35}P_4\right) 6\psi_2$$

$$d = \left(\frac{2}{5} + \frac{2}{7}P_2 - \frac{24}{35}P_4\right)\psi_2 \quad .$$

Mit diesen Entwicklungen ergeben die Gleichungen (6.13) für $\ell \leq 2$ nach Elimination von w_0 und w_2 ohne weitere Näherung die Eigenwertgleichung 4. Ordnung für ψ_2 und λ :

$$-\frac{21}{2}(4-3\beta)(1-4D_{ad})\,\lambda\,\frac{u'}{x}\psi_2 =$$

$$= \left(\frac{1}{u^3}\psi_2'\right)' - \left(\frac{6}{x^2u^3} + \frac{10}{x}\left(\frac{1}{u^3}\right)'\right)\psi_2 + \frac{3}{8}\beta x\,\Delta_2\frac{1}{u^2u'}\left(\psi_2'' - \frac{6}{x^2}\psi_2\right). \qquad (6.18)$$

w_2 ergibt nach (6.13 b) für $\ell=4$ einen Koeffizienten ψ_4 :

$$-\frac{350}{3}(4-3\beta)(1-4D_{ad})\,\psi_4 = \frac{1}{x^2}\left[x^2(x^2w_2)' - 4x^3w_2\right]'$$

$$-\Delta_4(x^2w_2) + \frac{\beta}{4}\Delta_4\left\{\frac{1}{u^2u'}\left[(u^3x^2w_2)' - 4u^3xw_2\right]\right\} \quad . \qquad (6.19)$$

Die Näherung besteht nun in der Vernachlässigung der Rückwirkung von ψ_4 auf die w - Störung in (6.13 a). Damit wird nur die Klasse der Eigenfunktionen erfaßt, deren ϑ - Abhängigkeit der einfachen angenommenen Gestalt (6.15-16) nahekommt.

Die Entwicklungskoeffizienten der Geschwindigkeitskomponenten

$$v_{x2} = \frac{6}{u^3x^2}\psi \qquad \text{und} \qquad v_{\vartheta 2} = -\frac{1}{xu^3}\psi_2' \qquad (6.20\ a,b)$$

müssen im Zentrum verschwinden. Das bedeutet, daß dort $\psi_2 \sim x^3$ gelten muß. An der Oberfläche tritt eine Singularität in den Geschwindigkeiten infolge des Nullwerdens der Dichte $\sim (x-x_1)^3$ auf. Wie in Kap. V,2. wird gefordert, daß dort die mechanische Energie der Störungen, d.h. u^3w^2, $u^3v_{x2}^2$, $u^3v_{\vartheta 2}^2$ endlich bleibt.

Das ergibt ein Verhalten von ψ_2 am Rand: $\psi_2 \sim (x-x_1)^3$. Es wird angenommen, daß solche Lösungen von (6.18) existieren. Multiplikation von (6.18) mit ψ_2 und Integration über das Intervall $(0, x_1)$ ergibt nach einigen partiellen Integrationen die Darstellung für die Eigenwerte solcher Lösungen:

$$(1-4\,\mathrm{Da}\alpha)(4-3\beta)\,\frac{21}{2}\,\lambda \int_0^{x_1} \frac{u'}{x}\,\psi_2^2\,dx$$
$$= \int_0^{x_1} \frac{1}{u^3}\left[\psi_2'^2 + \left(\frac{6}{x^2} - \frac{30}{x}\,\frac{u'}{u}\right)\psi_2^2 - \frac{3}{8}\,\beta\,\frac{xu}{u'}\left(\psi_2'' - \frac{6}{x^2}\,\psi_2\right)^2\right]dx, \qquad (6.21)$$

die wegen $(1-4\,\mathrm{Da}\alpha) < 0$ und $u' < 0$ sofort zeigt, daß $\lambda > 0$ gilt. Wenn Gleichung (6.18) mit den oben angegebenen Randbedingungen in irgend einem Sinne eine gute Approximation des allgemeinen Eigenwertproblems darstellt und Lösungen existieren, so besagt (6.21) die säkulare Instabilität des stationär rotierenden Standardmodells in der Näherung $\chi \to 0$. Dies würde bedeuten, daß sowohl die Boussinesq-Approximation (6.5) als auch die Untersuchung großräumiger Störungen am Zylinder keinen Anhaltspunkt für das Stabilitätsverhalten des sphärischen Standardmodells geben kann.

Zur Konvergenzfrage des Verfahrens wird eine grobe Näherungsbetrachtung am Grenzfall $\beta \to 0$ gemacht.

Für $\beta \to 0$ reduziert sich (6.18) auf eine Gleichung 2. Ordnung. Es gilt

$$42\,\lambda^*\,\frac{u'}{x}\,\psi_2 = \left(\frac{1}{u^3}\,\psi_2'\right)' - \left(\frac{6}{x\,u^3} + \frac{10}{x}\left(\frac{1}{u^3}\right)'\right)\psi_2 \,, \qquad (6.22)$$

wobei $\lambda^* = -\lambda(1-4\,\mathrm{Da}\alpha)$ gesetzt wurde (die β - Abhängigkeit von λ^* ist im Zusammenhang dieser Betrachtung nicht interessant). Mit (6.19) und (6.22) läßt sich ψ_4 durch ψ_2 und ψ_2' ausdrücken:

$$u^3 u'\,\psi_4 = \frac{3}{25}\,\lambda^{*-1}\left(\psi_2' + 3\left(\frac{u'}{u} - \frac{1}{x}\right)\psi_2 - 6\,u^2 u'\,\lambda^*\psi_2\right). \qquad (6.23)$$

I.a. stützt (6.23) die Ansätze (6.18) und (6.21) nicht. Durch das Auftreten des Faktors $u^3 u'$ bei ψ_4 in (6.23) bzw. von u^3

in (6.13 a) und u' bei ψ_ℓ in (6.13 b) divergiert die Reihe (6.11) im Zentrum und an der Oberfläche sicher, da dort $|\psi_{\ell+1}/\psi_\ell| \to \infty$ geht. Schlechtes Randverhalten der Näherungslösungen bedeutet jedoch noch nicht ihre Unbrauchbarkeit zur genäherten Berechnung des Eigenwertes, solange die Näherungslösungen sonst zutreffen. Das Verhältnis ψ_4/ψ_2 kann für die Fundamentallösung im Inneren des Integrationsintervalls mit $\chi = 3$ unter Vernachlässigung von ψ_2' aus (6.23) abgeschätzt werden. Konsistent mit dieser Annahme wird in (6.23) für der Wert eingesetzt, der über den Rayleigh-Quotienten (Collatz (1951)) mit einer Vergleichsfunktion ohne Knoten aus (6.22) folgt. Mit $\psi_2 \sim x^3(x-x_1)^3$ ergibt sich $\lambda^* \approx 50$. Damit folgt aus (6.23) das günstige Verhältnis $\psi_4/\psi_2 \approx \frac{1}{10}$. Es erscheint nicht unmöglich, daß sich für eine Klasse von Eigenfunktionen die Vernachlässigung von ψ_4 und damit die Gleichungen (6.18) und (6.21) rechtfertigen lassen. Dieser Frage wurde nicht im einzelnen nachgegangen, da das eine numerische Analyse des Systems (6.13) erfordern würde.

Daher wurde die Lösung des allgemeinen Eigenwertproblems mit einem direkten Verfahren in Angriff genommen.

3. Das Differenzenverfahren

Es wurde versucht, das Gleichungssystem (6.4) für $\chi \neq 0$ numerisch zu behandeln. Hierüber soll kurz berichtet werden.

Nach Elimination von $w, f_x, f_\vartheta, \alpha$ aus (6.4) erhält man ein Gleichungssystem von 5 Gleichungen für $p, t, \phi, v_x, v_\vartheta$, das aus den beiden Komponenten der Bewegungsgleichung (1. Ordnung in $\frac{\partial}{\partial x}$ bzw. $\frac{\partial}{\partial \vartheta}$), der Kontinuitätsgleichung (1. Ordnung in $\frac{\partial}{\partial x}$ und $\frac{\partial}{\partial \vartheta}$), der Drehimpulserhaltung (1. Ordnung in $\frac{\partial}{\partial x}$) und der Poissongleichung (2. Ordnung in $\frac{\partial}{\partial x}$ und $\frac{\partial}{\partial \vartheta}$), sowie der Energiegleichung) (2. Ordnung in $\frac{\partial}{\partial x}$ und $\frac{\partial}{\partial \vartheta}$) besteht. Das ist ein Problem 6. Ordnung in $\frac{\partial}{\partial x}$ und $\frac{\partial}{\partial \vartheta}$.

Das Integrationsgebiet ist ein Quadrant der meridionalen Ebene (vgl. Abb. 6). Für die Störungen p, ϕ, t, v_x wird Symmetrie zum Äquator, d.h. ein Verhalten $\sim f(\cos^2\vartheta)$ angenommen. Aus der Gleichung (6.4 d) folgt daraus für v_ϑ die Symmetrie $\cos\vartheta \sin\vartheta\, f(\cos^2\vartheta)$

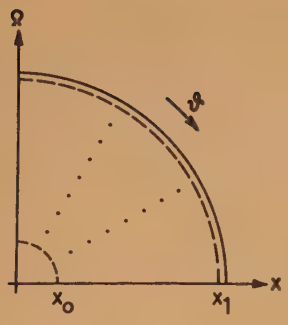

Abb. 6: Das Integrationsgebiet für die numerische Lösung des partiellen Systems. Auf den gestrichelten Kreisbögen werden die genäherten Randbedingungen (6.24) bzw. (6.25) gestellt. Ein mögliches Gitter ist eingezeichnet.

Damit liegen an den Flanken $\vartheta = 0$, $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ die Randbedingungen fest. Die Randbedingungen im Zentrum und an der Oberfläche lassen sich nur näherungsweise aufstellen, da das Differentialgleichungssystem nichtseparierbar und bei $x = 0$ und $x = x_1 = 6.9011$ singulär ist. Das Randverhalten der Lösungen läßt sich nicht aus der "Indexgleichung" wie bei gewöhnlichen Differentialgleichungen bestimmen. Es werden daher physikalisch plausible Näherungsrandbedingungen in der Nachbarschaft der exakten Ränder bei $x_0 > 0$ und $x_s < x_1$ (gestrichelte Kreisbogen in Abb.6) gestellt. Der verwendete vollständige Satz von Randbedingungen lautet:

$x = x_s$: ϕ, $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ stetig mit der Laplacelösung für $x > x_s$, (6.24a)

$$p = 4u^3 t \quad , \quad v_x = 0 \quad ; \tag{6.24b,c}$$

$x = x_0$: ϕ, $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ stetig mit der Laplacelösung für $0 \le x \le x_0$, (6.25 a)

$$\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{x} \frac{\partial t}{\partial \vartheta} = 0 \quad , \tag{6.25 b}$$

$$4u^3 t = \int_0^{\pi/2} p \sin\vartheta \, d\vartheta \quad , \quad v_x = 0 \quad . \tag{6.25c,d}$$

(6.24 a) folgt aus der Annahme $\varrho = 0$ für $x > x_1$, (6.24 b) mit $P = T = 0$ bei x_1, (6.25 a) mit der Annahme, eine Umgebung des Zentrums sei inkompressibel, (6.25 b) aus der Bedingung der Stationarität von P, T im Zentrum und (6.25 c) aus der Forde-

rung, die Leuchtkraft sei im Zentralbereich ungestört.

Die Randbedingungen an ϕ werden bezüglich ihrer Entwicklungskoeffizienten ϕ_ℓ nach Legendre-Polynomen formuliert. Mit

$$\phi_\ell(x_1) = \frac{a_\ell}{x_1^{\ell+1}} \quad \text{und} \quad \phi_\ell'(x_1) = -(\ell+1)\frac{a_\ell}{x_1^{\ell+2}} \tag{6.26}$$

folgt bei $x = x_1$:

$$\frac{d\phi_\ell}{dx}(x_1)\,x_1 + (\ell+1)\,\phi_\ell(x_1) = 0 \quad . \tag{6.27}$$

Eine ähnliche Bedingung gilt bei $x = x_0$.

In die meridionale Ebene wird ein Gitter von n radialen Strahlen $\vartheta = \vartheta_k$ mit m äquidistanten Stützstellen $x = x_i$ gelegt (Abb. 6). In x - Richtung wird das einfache Differenzenverfahren angewandt. Die ϕ - Bedingung (6.27) wird mit den folgenden Entwicklungen in eine Differenzenformel umgewandelt ($\mu = \cos\vartheta$) :

$$\phi(x,\mu) = \sum_{\ell=0}^{2(n-1)} \phi_\ell(x)\,P_\ell(\mu) \tag{6.28a}$$

$$\phi_\ell(x) = (2\ell+1)\int_0^1 \phi(x,\mu)\,P_\ell(\mu)\,d\mu \approx (2\ell+1)\sum_{k=1}^{n} H_k\,P_\ell(\mu_k)\,\phi(x,\mu_k) \tag{6.28b}$$

Mit (6.27) gilt dann

$$\frac{d\phi}{dx}(x_1,\mu_k)\,x_1 = \frac{x_1}{\Delta x}\left[\phi(x_m,\mu_k) - \phi(x_{m-1},\mu_k)\right] = -\sum_{j=1}^{n} C_{kj}\,\phi(x_1,\mu_j) \quad , \tag{6.29}$$

wobei $$C_{kj} = \sum_{\ell=0}^{2(n-1)} (\ell+1)(2\ell+1)\,H_j\,P_\ell(\mu_j)\,P_\ell(\mu_k) \quad , (\ell \text{ gerade}) \; . \tag{6.30}$$

In (6.28-30) sind μ_k, H_k die nach der Gaußschen Quadraturformel folgenden optimalen Stützstellen und Gewichte für die Näherung der Integration in (6.28) (μ_k und H_k sind tabelliert bei Kopal (1961)). In ähnlicher Weise werden alle ϑ - Ableitungen in den Grundgleichungen und die Randbedingungen in ϑ - Richtung ausgedrückt und in Differenzenformeln bezüglich des Gitters μ_k, x_i ; umgewandelt.

Die Matrixformulierung des Eigenwertproblems führt auf die Form

$$(A + \lambda B)\,\underline{x} = 0 \qquad (6.31),$$

in der die Matrizen A und B die Koeffizienten der Randbedingungen und der Gleichungen an allen Gitterpunkten enthalten. $\underline{x}$ ist der Variablenvektor, der entsprechend den fünf Unbekannten an jedem Gitterpunkt aus $5nm$ Komponenten besteht. Die Matrizen A und B sind beide nicht invertierbar. Das einfache Mises-sche Iterationsverfahren zur Berechnung der Eigenfunktionen und Eigenwerte ist daher nicht anwendbar. Eine Iterationsmethode für diesen Fall stellt der "Quotienten-Differenzen-Algorithmus" das (Stiefel (1965)), der in jedem Iterationsschritt für den Eigenwert die Auflösung zweier linearer Gleichungssysteme der Ordnung $5nm$ erfordert. Genaue Überlegungen zeigten, daß dieses Verfahren wegen der großen zu lösenden Gleichungssysteme und seiner bekannten langsamen Konvergenz mit der Göttinger Rechenmaschine IBM 7040 nicht durchführbar ist.

Es wurde daher auf die Berechnung der Eigenfunktionen verzichtet und versucht, die Determinante $\| A + \lambda B \|$ in Abhängigkeit von vorgegebenen Werten λ zu berechnen. Hierbei erwies sich die Form (6.27) der ϕ - Randbedingung als außerordentlich erschwerend, da sie nach (6.29) die $\phi(x, \mu_\kappa)$ für alle μ_κ miteinader verknüpft. Das führt zu einer grundsätzlichen Beschränkung der Wahl n für die Anzahl der Stützstellen in ϑ - Richtung. Bei optimaler Anordnung und Speicherung der Matrix und bei der aus Genauigkeitsgründen erforderlichen Rechnung mit 16 Dezimalen liegt das maximale n bei 7.

Die Rechnungen ergaben folgende Situation: Bei einem Netz mit $m = 10$ und $n = 5$ wurde ein Eigenwert $\lambda \approx 35$ (Instabilität) als Nullstelle der Determinante gefunden. Es stellte sich jedoch heraus, daß das Auftreten dieser Nullstelle empfindlich von der Wahl des Netzes abhängt. Ob eine numerische Instabilität vorliegt, konnte nicht geprüft werden, da die Eigenfunktionen nicht zur Verfügung standen. Bei einer Verfeine-

rung des Netzes wurden infolge des raschen Anwachsens der Dimension von A und B die Genauigkeitsverluste so hoch, daß keine signifikanten Ergebnisse mehr zu erzielen waren. Die Rechnungen wurden daher abgebrochen.

Nach den in den beiden vorangegangenen Abschnitten dargelegten Erfahrungen hat eine Lösung des allgemeinen Eigenwertproblems für ein realistisches (sphärisches) Sternmodell mit den üblichen analytischen Methoden und den z.Zt. vorhandenen maschinellen Hilfsmitteln als außerordentlich schwierig zu gelten. Das gilt insbesondere für das zeitabhängige Problem der Wechselwirkung zwischen dem thermischen Feld und dem Zentrifugalfeld eines Sterns, das nach dem Ergebnis von Kap. III an die Stelle der bisherigen Analysen rotierender Sterne aufgrund der zirkulationsfreien Zustände zu treten hat.

Für die Anregung zu dieser Arbeit und für viele fördernde Diskussionen spreche ich Herrn Professor Kippenhahn meinen aufrichtigen Dank aus.

Literaturverzeichnis

Abramovitz, M. , Stegun, I.A., 1965, "Handbook of Math.Functions" Dover Publ. New York

Baker, N., Kippenhahn,R., 1959, Z.f.Ap. 48, 140

Chandrasekhar,S., 1957, "Stellar Structure", Dover Publ.
1961, "Hydrodyn. & Hydromagn. Stability" Oxford

Collatz, L,, 1951, "Num. Behandlg. v. Diff.Gln.", Springer

Cowling, T.G., 1941 M.N. 101, 367

Danielson,R.E.,1961 Ap.J. 134, 289

Eddington,A.S.,1925, Observatory 48, 73

Kippenhahn,R., 1962, Proc. Int. School of Phys. "E. Fermi" XXVIII, Acad. Press

Kopal, Z., 1961, "Numerical Analysis" S. 347 ed. Chapman & Hall, Ltd.

Ledoux, P., 1965, "Stars & Stellar Systems", Vol.VIII, 499

Mestel, L., 1953, M.N. 113, 716
1965, "Stars & Stellar Systems", Vol.VIII,465

Roxburgh,I., 1964, a) M.N. 128, 157 b)M.N. 128, 237
1965, M.N. 130, 1
1966, a) M.N. 132, 201 b) M.N. 133, 345

Schwarzschild, M., 1942, Ap.J. 95, 441 1947, Ap.J. 106, 427
1958, "Structure & Evolution of the Stars" Princeton

Spiegel, E., Veronis, G., 1960, Ap.J. 131, 442

Stiefel, E., 1965, "Einf. i.d. num. Math.",Teubner, Stuttg.

Sweet, P.A., 1950, M.N. 110, 548

Vogt, H., 1925, A.N. 223, 229

von Zeipel,H., 1924, M.N. 84, 665

Zurmühl,R., 1966, "Prakt. Math.", 5. Aufl., Springer

Lebenslauf

Am 25. November 1937 wurde ich als vierter Sohn des Zahnarztes Dr. Richard Fricke und seiner Ehefrau Alice, geb. Reinhardt, in Leipzig geboren. Dort besuchte ich die Grundschule vom Herbst 1943 bis zum Herbst 1951. Der weitere Schulbesuch war mir zunächst nicht gestattet. Ich wurde Lehrling in einer Elektromotorenfabrik. Nach einem Jahr besuchte ich vom Herbst 1952 bis zur Reifeprüfung im Sommer 1956 den humanistischen Zweig der Thomasschule zu Leipzig.

Im Herbstsemester 1956/57 begann ich an der Technischen Hochschule Dresden mit dem Studium der Physik. Nach drei Semestern verließ ich im Frühjahrsemester 1958 Dresden und setzte mein Studium an der Freien Universität Berlin im Sommer 1958 fort. Im November 1958 legte ich dort das Physik - Vordiplom ab. Nach dem zweiten Berliner Semester wechselte ich zum Sommersemester 1959 an die Göttinger Universität über, wo ich bis zur Ablegung der Diplomprüfung im Dezember 1963 studierte. Meine Diplomarbeit fertigte ich unter Anleitung von Herrn Professor Elsässer (seit 1962 Direktor der Königsstuhl-Sternwarte Heidelberg) an. Sie hat den Zustand der Sonnenflecken zum Gegenstand.

Nach dem Diplom studierte ich in München. Im Wintersemester 1964/65 begann ich als Stipendiat am Max - Planck - Institut für Physik und Astrophysik mit meiner Dissertation unter Anleitung von Herrn Professor Kippenhahn, dem ich zum Sommersemester 1965 wieder an die Göttinger Universitätssternwarte folgte. Seit Mai 1965 ist mir die Verwaltung einer wissenschaftlichen Assistentenstelle übertragen.